Углублённый уровень

АЛГЕБРА

и начала математического анализа

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

11

МАТЕМАТИКА

вентана граф

российский учебник

А. Г. Мерзляк
Д. А. Номировский
В. М. Поляков

Математика

АЛГЕБРА

И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

11 класс

Углублённый уровень

Учебное пособие

Под редакцией В. Е. Подольского

Москва
Издательский центр
«Вентана-Граф»
2019

От авторов

Дорогие одиннадцатиклассники!

В этом учебном году вы оканчиваете школу. Надеемся, что знания, которые вы получили, изучая математику по углублённой программе, станут для вас надёжной основой в овладении будущей профессией. Будем искренне рады, если важную роль в этом сыграет учебник, который вы держите в руках. Ознакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.

Текст учебника разделён на пять глав, каждая из которых состоит из параграфов. В параграфах изложен теоретический материал. Особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным шрифтом**. Также обращайте внимание на слова, выделенные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи.

К данному учебнику создано приложение. Содержащийся в нём материал является продолжением главы 4 «Элементы теории вероятностей». Отметим, что в данной главе расширяются и уточняются понятия, рассмотренные в курсе алгебры. Для облегчения восприятия авторы посчитали целесообразным повторить ряд примеров из учебника «Алгебра. 9 класс»[1].

Школьный курс алгебры и начал анализа 11 класса содержит много важных и глубоких фактов. Некоторые из них в учебнике доказаны, часть приводится без доказательства. С их доказательством вы сможете ознакомиться, если изберёте профессию, связанную с математикой.

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время и вы хотите знать больше, то рекомендуем обратиться к рубрике «Когда сделаны уроки». Материал, изложенный там, непрост. Но тем интереснее испытать свои силы!

Дерзайте! Желаем успехов!

---

[1] Мерзляк А. Г., Поляков В. М. «Алгебра. 9 класс».

Условные обозначения

Простые задачи

Задачи средней сложности

Сложные задачи

Задачи высокой сложности

Ключевые задачи, результат которых можно использовать при решении других задач

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения задачи

5.1. Задания, рекомендуемые для устной работы

5.6. Задания, рекомендуемые для домашней работы

глава

1 Показательная и логарифмическая функции

В этой главе вы ознакомитесь с понятием степени с произвольным действительным показателем. Вы узнаете, какие функции называют показательной и логарифмической, изучите свойства этих функций, научитесь решать показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

§ 1 Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция

В 10 классе вы ознакомились с понятием степени положительного числа с рациональным показателем. Теперь мы выясним, что представляет собой степень положительного числа с действительным показателем.

Строгое определение степени с действительным показателем и доказательство её свойств выходит за пределы рассматриваемого курса. Текст этого параграфа содержит лишь общие пояснения того, как можно провести необходимые обоснования.

В курсе алгебры 9 класса вы ознакомились с понятием предела последовательности. Напомним основные моменты.

Рассмотрим последовательность (a_n), заданную формулой n-го члена. Например, $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Выпишем несколько первых членов этой последовательности:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \ldots .$$

Если члены этой последовательности изображать точками на координатной прямой, то эти точки будут располагаться всё ближе и ближе к точке с координатой 1 (рис. 1.1). Если рассмотреть произвольный промежуток $(1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$, содержащий число 1, то с некоторого момента все члены последовательности a_n попадут в него.

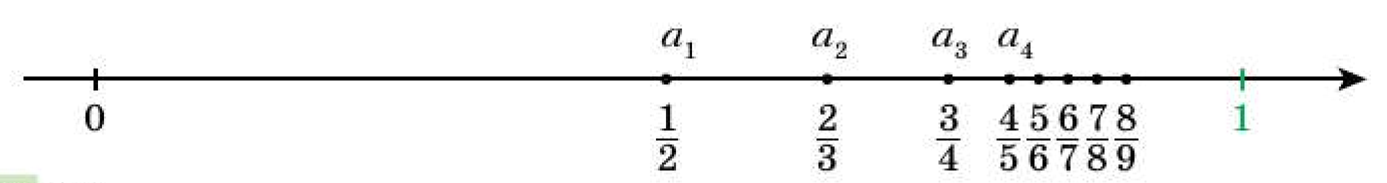


Рис. 1.1

В этом случае говорят, что число 1 является **пределом последовательности** a_n, и записывают $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$ (здесь lim — это начальные буквы французского слова *limite* — предел). Также можно записать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Если число a является пределом последовательности (a_n), то говорят, что последовательность (a_n) **сходится к числу** a.

Разъяснение понятия степени положительного числа с действительным показателем начнём с частного случая. Выясним, что понимают под степенью числа 2 с показателем π.

Иррациональное число π можно представить в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$\pi = 3{,}1415\ldots\ .$$

Рассмотрим последовательность рациональных чисел

$$3;\ 3{,}1;\ 3{,}14;\ 3{,}141;\ 3{,}1415;\ \ldots\ . \qquad (1)$$

Понятно, что эта последовательность сходится к числу π.

В соответствии с последовательностью (1) построим последовательность степеней с рациональными показателями:

$$2^3,\ 2^{3,1},\ 2^{3,14},\ 2^{3,141},\ 2^{3,1415},\ \ldots\ . \qquad (2)$$

Можно показать, что члены последовательности (2) с увеличением номера стремятся к некоторому положительному числу. Это число и называют степенью числа 2 с показателем π и обозначают 2^π.

Если с достаточной точностью вычислить приближённые значения членов последовательности (2), например, воспользовавшись калькулятором, то можно получить последовательность чисел, являющихся приближёнными значениями числа 2^π. Имеем:

$$\begin{aligned}
&2^3 = 8,\\
&2^{3,1} = 8{,}5\ldots,\\
&2^{3,14} = 8{,}81\ldots,\\
&2^{3,141} = 8{,}821\ldots,\\
&2^{3,1415} = 8{,}8244\ldots,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

На самом деле, $2^\pi = 8{,}82497\ldots$.

Аналогично можно действовать в общем случае, определяя смысл выражения b^α, где $b > 0$, α — любое действительное число. Для числа α строят сходящуюся к нему последовательность рациональных чисел α_1, α_2, α_3, ... Далее рассматривают последовательность b^{α_1}, b^{α_2}, b^{α_3}, ... степеней с рациональными показателями (напомним, что степень положительного числа с рациональным показателем мы определили в курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса). Можно доказать, что эта последовательность сходится к положительному числу c, которое не зависит от выбора сходящейся к α последовательности рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$. Число c называют **степенью положительного числа** b с действительным показателем α и обозначают b^α.

Если основание b равно единице, то $1^\alpha = 1$ для всех действительных α.

Если основание b равно нулю, то степень 0^α определяют только для $\alpha > 0$ и считают, что $0^\alpha = 0$. Например, $0^{\sqrt{2}} = 0$, $0^\pi = 0$, а выражение $0^{-\sqrt{3}}$ не имеет смысла.

При $b < 0$ выражение b^α, где α — иррациональное число, не имеет смысла.

Степень с действительным показателем обладает теми же свойствами, что и степень с рациональным показателем.

В частности, для $x > 0$, $y > 0$ и любых действительных α и β справедливы такие равенства:

1) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha + \beta}$;
2) $x^\alpha : x^\beta = x^{\alpha - \beta}$;
3) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;
4) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$;
5) $\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$.

Пример 1. Упростите выражение $\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}}$.

Решение. Имеем:

$$\frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{3\sqrt{7}} - a^{2\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}})}{a^{4\sqrt{7}} + a^{\sqrt{7}}} = \frac{(a^{\sqrt{7}}+1)(a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}} + 1)a^{\sqrt{7}}}{(a^{3\sqrt{7}}+1)a^{\sqrt{7}}} = \frac{a^{3\sqrt{7}}+1}{a^{3\sqrt{7}}+1} = 1. \blacksquare$$

Выберем некоторое положительное число a, отличное от 1. Каждому действительному числу x можно поставить в соответствие положительное число a^x. Тем самым задана функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, с областью определения $\boldsymbol{R}$.

Эту функцию называют **показательной функцией**.

Изучим некоторые свойства показательной функции.

При $a > 0$ и любом x выполняется неравенство $a^x > 0$. Поэтому область значений показательной функции состоит только из положительных чисел.

Можно показать, что для данного числа a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, и для любого положительного числа b существует такое число x, что выполняется равенство $a^x = b$.

☞ Сказанное означает, что *областью значений показательной функции является множество* $(0; +\infty)$.

☞ *Показательная функция не имеет нулей, и промежуток* $(-\infty; +\infty)$ *является её промежутком знакопостоянства.*

☞ *Показательная функция непрерывна.*

☞ Покажем, что *при* $a > 1$ *показательная функция является возрастающей*. Для этого воспользуемся леммой.

Лемма

Если $a > 1$ и $x > 0$, то $a^x > 1$; если $0 < a < 1$ и $x > 0$, то $0 < a^x < 1$.

Например, $2^{\frac{1}{\pi}} > 1$, $0 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} < 1$.

Рассмотрим произвольные числа x_1 и x_2 такие, что $x_2 > x_1$, и функцию $f(x) = a^x$, где $a > 1$.

Поскольку $x_2 > x_1$, то $x_2 - x_1 > 0$. Тогда согласно лемме имеем: $a^{x_2 - x_1} > 1$, т. е. $\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$. Так как $a^{x_1} > 0$, то $a^{x_2} > a^{x_1}$. Отсюда $f(x_2) > f(x_1)$.

Мы показали, что из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Это означает, что функция f является возрастающей при $a > 1$.

☞ Аналогично можно показать, что *при* $0 < a < 1$ *показательная функция является убывающей*.

☞ Поскольку показательная функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума*.

☞ *Показательная функция является дифференцируемой.* Подробнее о производной показательной функции вы узнаете в § 8.

На рисунках 1.2 и 1.3 схематически изображён график показательной функции для случаев $a > 1$ и $0 < a < 1$ соответственно.

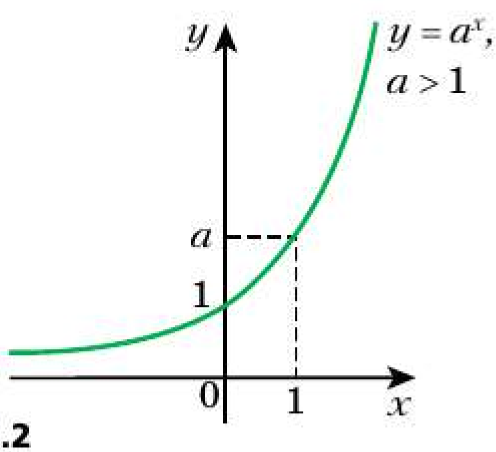


Рис. 1.2

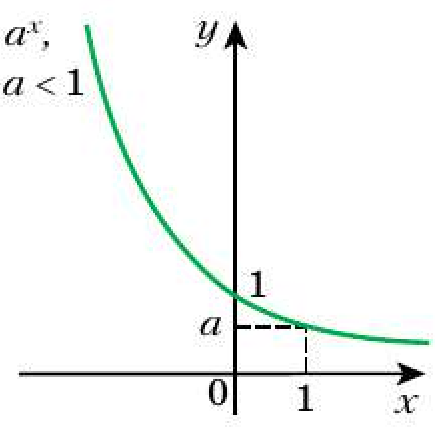


Рис. 1.3

В частности, на рисунках 1.4 и 1.5 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

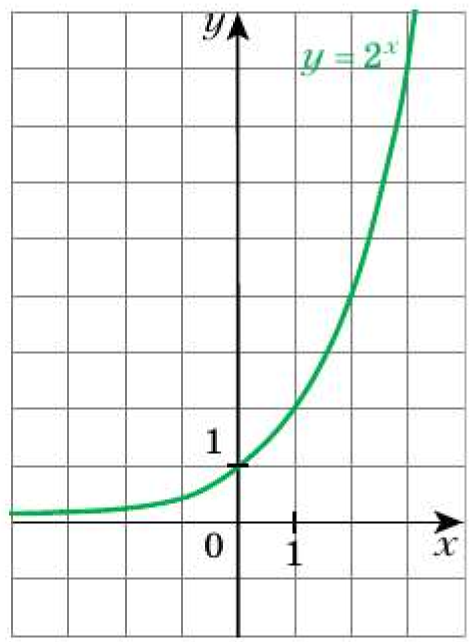


Рис. 1.4

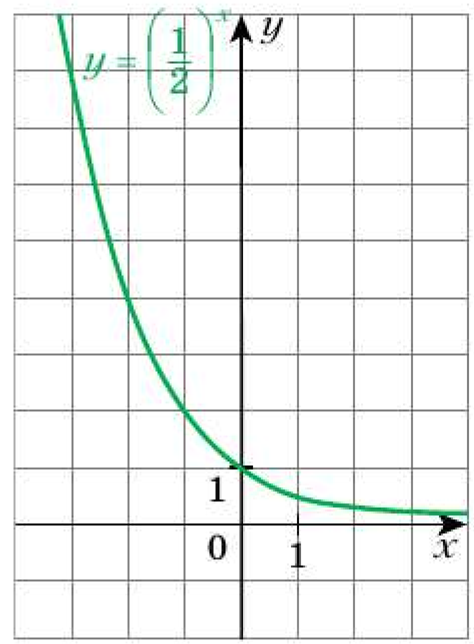


Рис. 1.5

Заметим, что при $a > 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$. Аналогично при $0 < a < 1$ график показательной функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$.

Показательная функция является математической моделью целого ряда процессов, происходящих в природе и в деятельности человека.

Например, биологам известно, что колония бактерий в определённых условиях за равные промежутки времени увеличивает свою массу в одно и то же количество раз.

Это означает, что если, например, в момент времени $t = 0$ масса была равной 1, а в момент времени $t = 1$ масса была равной a, то в моменты времени $t = 2$, $t = 3$, ..., $t = n$, ... масса будет равной соответственно a^2, a^3, ..., a^n, ... Поэтому естественно считать, что в любой момент времени t масса будет равной a^t. Можно проверить (сделайте это самостоятельно), что значения функции $f(t) = a^t$ увеличиваются в одно и то же количество раз за равные промежутки времени.

Таким образом, рассмотренный процесс описывают с помощью показательной функции $f(t) = a^t$.

Из курса физики известно, что при радиоактивном распаде масса радиоактивного вещества за равные промежутки времени уменьшается в одно и то же количество раз.

Если поместить деньги в банк под определённый процент, то каждый год количество денег на счёте будет увеличиваться в одно и то же количество раз.

Поэтому показательная функция описывает и эти процессы.

В таблице приведены свойства функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$\boldsymbol{R}$
Область значений	$(0; +\infty)$
Нули функции	—
Промежутки знакопостоянства	$y > 0$ на $\boldsymbol{R}$
Возрастание/убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Если $a > 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to -\infty$; если $0 < a < 1$, то график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ при $x \to +\infty$

Пример 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = 3^x$ на отрезке $[-4; 3]$.

Решение. Так как функция f возрастает на отрезке $[-4; 3]$, то наименьшее значение она принимает при $x = -4$, а наибольшее — при $x = 3$. Следовательно,

$$\min_{[-4;3]} f(x) = f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81},$$

$$\max_{[-4;3]} f(x) = f(3) = 3^3 = 27.$$

Ответ: $\frac{1}{81}$; 27. ■

Пример 3. Решите уравнение $(\sqrt{2} - 1)^{|x|} = \sin^2 x + 1$.

Решение. Так как $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, а $|x| \geqslant 0$, то $(\sqrt{2}-1)^{|x|} \leqslant (\sqrt{2}-1)^0 = 1$. В то же время $\sin^2 x + 1 \geqslant 1$. Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(\sqrt{2}-1)^{|x|} = 1,\\ \sin^2 x + 1 = 1.\end{cases}$$

Отсюда $x = 0$.

Ответ: 0. ■

1. Опишите, как можно ввести понятие степени с иррациональным показателем.

2. Перечислите свойства степени с действительным показателем.

3. Перечислите свойства показательной функции.

Упражнения

1.1. Вычислите значение выражения:

1) $3^{(\sqrt{2}+1)^2} : 3^{2\sqrt{2}}$;

2) $\left((3\sqrt[3]{7})^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt[3]{6^{(\sqrt{5}+1)^2} \cdot 36^{-\sqrt{5}}}$;

4) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{-\sqrt{8}}$.

1.2. Найдите значение выражения:

1) $5^{(\sqrt{3}-1)^2} : \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2\sqrt{3}}$;

2) $\left((\sqrt{2})^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}}$;

3) $\left((\sqrt[5]{10})^{\sqrt{5}}\right)^{-2\sqrt{5}}$.

1.3. Докажите, что:

1) $\dfrac{5^{\sqrt{8}}}{5^{\sqrt{2}}} = 5^{\sqrt{2}}$;

2) $4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} = (16^{\sqrt{3}})^{-2}$;

3) $\dfrac{12^{\sqrt{48}} \cdot 2^{4\sqrt{12}}}{4^{\sqrt{108}} \cdot 6^{\sqrt{27}}} = 6^{\sqrt{3}}$.

1.4. Сравните с числом 1 степень:

1) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$;

2) $\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^{\pi}$;

3) $0{,}6^{2\sqrt{5}}$;

4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-\sqrt{3}}$;

5) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{\pi}$;

6) $\left(\dfrac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{6}}$.

1.5. Какие из данных чисел больше 1, а какие меньше 1:

1) $1{,}8^{\sqrt{1{,}8}}$;

2) $\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^{\sqrt{10}}$;

3) $7^{-\sqrt{2}}$;

4) $0{,}3^{-\pi}$?

1.6. Какая из данных функций является показательной:

1) $y = x^6$;

2) $y = \sqrt[6]{x}$;

3) $y = 6^x$;

4) $y = 6$?

1.7. На основании какого свойства показательной функции можно утверждать, что:

1) $\left(\frac{7}{9}\right)^{3,2} < \left(\frac{7}{9}\right)^{2,9}$; 2) $\left(\frac{4}{3}\right)^{1,8} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1,6}$?

1.8. Укажите, какие из данных функций являются возрастающими, а какие — убывающими:

1) $y = 10^x$; 3) $y = 2^{-x}$; 5) $y = 2^x \cdot 3^x$;

2) $y = \left(\frac{5}{9}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$; 6) $y = 12^x \cdot \left(\frac{1}{18}\right)^x$.

1.9. Постройте график функции $y = 3^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от –1 до 3 включительно?

1.10. Постройте график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. В каких пределах изменяется значение функции, если x возрастает от –2 до 2 включительно?

1.11. Сравните:

1) $5^{3,4}$ и $5^{3,26}$; 3) 1 и $\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$; 5) $(\sqrt{2})^{\sqrt{6}}$ и $(\sqrt{2})^{\sqrt{7}}$;

2) $0,3^{0,4}$ и $0,3^{0,3}$; 4) $0,17^{-3}$ и 1; 6) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,7}$ и $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{-2,8}$.

1.12. Сравните с числом 1 значение выражения:

1) $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$; 3) $\left(\frac{6}{7}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 5) $0,62^{-0,4}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$; 4) $\left(\frac{7}{6}\right)^{-\frac{1}{2}}$; 6) $3,14^{-0,4}$.

1.13. Сравните с числом 1 положительное число a, если:

1) $a^{\frac{5}{6}} > a^{\frac{2}{3}}$; 3) $a^{-0,3} > a^{1,4}$;

2) $a^{\sqrt{3}} < a^{\sqrt{2}}$; 4) $a^{-\sqrt{7}} < a^{1,2}$.

1.14. Сравните числа m и n, если:

1) $0,8^m < 0,8^n$; 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^m > \left(\frac{2}{3}\right)^n$;

2) $3,2^m > 3,2^n$; 4) $\left(1\frac{4}{7}\right)^m < \left(1\frac{4}{7}\right)^n$.

◆◆

1.15. Упростите выражение:

1) $(a^{\sqrt{5}} + 2)(a^{\sqrt{5}} - 2) - (a^{\sqrt{5}} + 3)^2$; 3) $\frac{a^{2\sqrt{3}} - b^{2\sqrt{2}}}{(a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}})^2} + 1$;

2) $\frac{a^{2\sqrt{7}} - a^{\sqrt{7}}}{a^{4\sqrt{7}} - a^{3\sqrt{7}}}$; 4) $\frac{a^{\sqrt[3]{24}} - 1}{a^{\sqrt[3]{3}} - 1} - \frac{a^{\sqrt[3]{81}} + 1}{a^{\sqrt[3]{3}} + 1}$.

1.16. Упростите выражение:

1) $\dfrac{(a^{2\sqrt{6}}-1)(a^{\sqrt{6}}+a^{2\sqrt{6}}+a^{3\sqrt{6}})}{a^{4\sqrt{6}}-a^{\sqrt{6}}}$; 2) $\left((a^{\pi}+b^{\pi})^2-(a^{\pi}-b^{\pi})^2\right)^{\frac{1}{\pi}}$.

1.17. Верно ли утверждение:

1) наибольшее значение функции $y = 0{,}2^x$ на промежутке $[-1; 2]$ равно 5;

2) областью определения функции $y = 4 - 7^x$ является множество действительных чисел;

3) областью значений функции $y = 6^x + 5$ является промежуток $[5; +\infty)$;

4) наименьшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ на промежутке $[-2; 2]$ равно 16?

1.18. Найдите область значений функции:

1) $y = -9^x$; 2) $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x + 1$; 3) $y = 7^x - 4$; 4) $y = 6^{|x|}$.

1.19. Найдите наибольшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{6}\right)^x$ на промежутке $[-2; 3]$.

1.20. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = 2^x$ равно 16, а наименьшее — $\dfrac{1}{4}$?

1.21. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ равно 27, а наименьшее — $\dfrac{1}{9}$?

1.22. Решите неравенство:

1) $2^x > -1$; 2) $2^{\sqrt{x}} > -2$.

1.23. Решите неравенство $2^{\frac{1}{x}} > 0$.

1.24. Постройте график функции:

1) $y = 2^x - 1$; 3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 2$; 5) $y = -2^x$;

2) $y = 2^{x-1}$; 4) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+2}$; 6) $y = 5 - 2^x$.

1.25. Постройте график функции:

1) $y = 3^x + 1$; 3) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x - 2$; 5) $y = -\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$;

2) $y = 3^{x+1}$; 4) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-2}$; 6) $y = -3^x - 1$.

1.26. График какой из функций, изображённых на рисунке 1.6, пересекает график функции $y = 5^x$ более чем в одной точке?

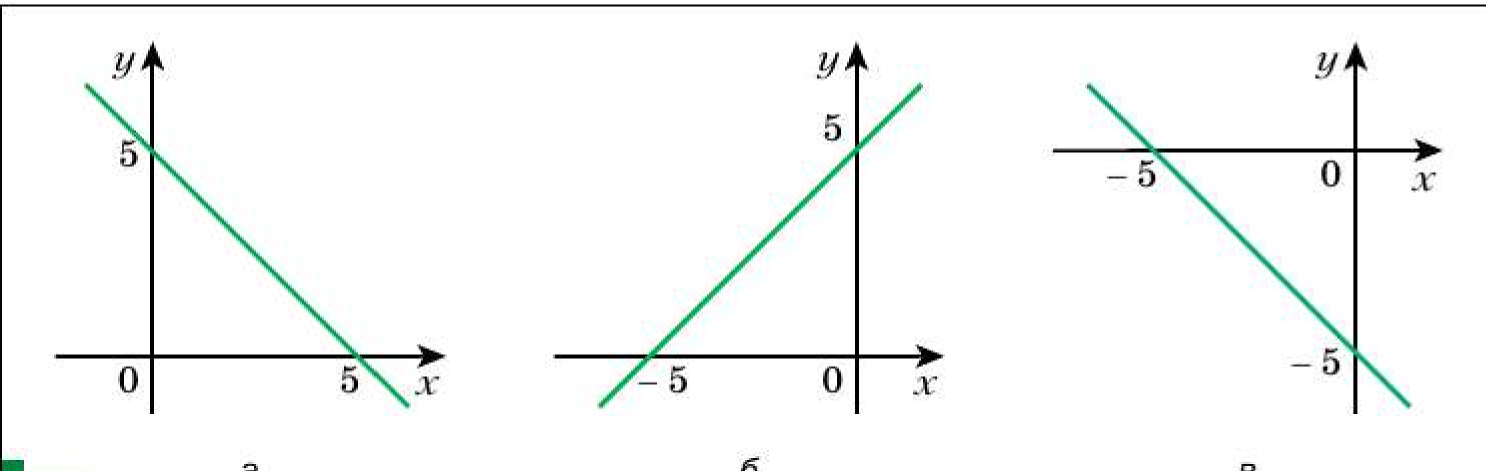


Рис. 1.6

1.27. На рисунке 1.7 укажите график функции $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x - 1$.

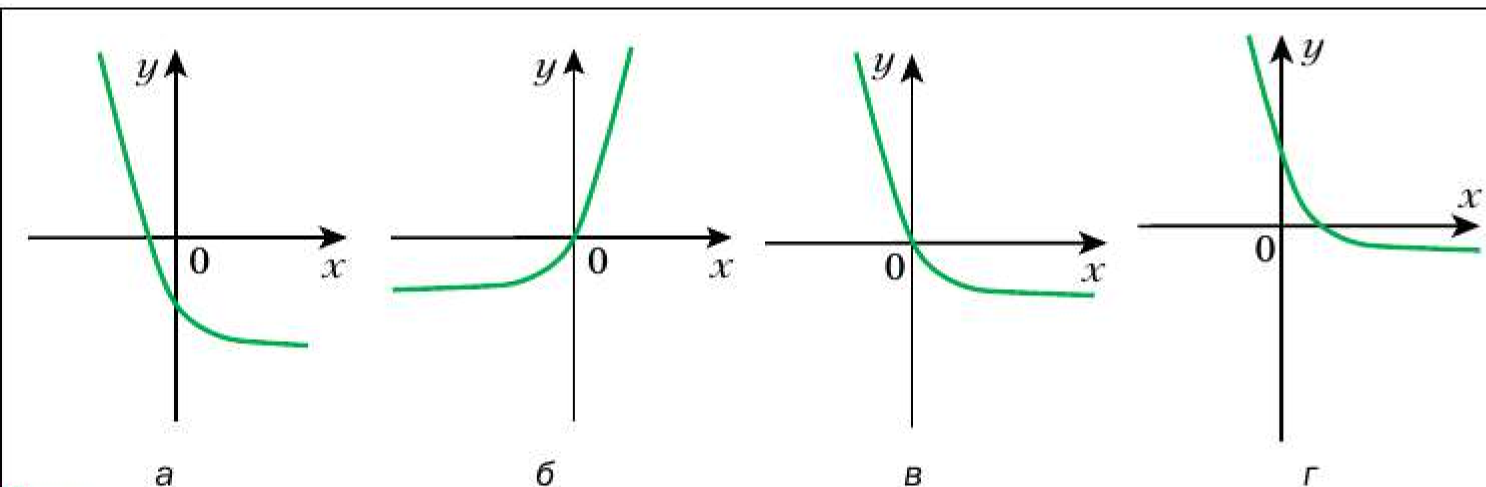


Рис. 1.7

1.28. Определите графически количество корней уравнения:

1) $2^x = x$; 2) $2^x = x^2$; 3) $2^x = \sin x$; 4) $2^{-x} = 2 - x^2$.

1.29. Определите графически количество корней уравнения:

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x^3$; 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \cos x$; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 - \frac{3}{x}$.

1.30. Постройте график функции:

1) $y = 2^{|x|}$; 3) $y = |2^x - 1|$;

2) $y = 2^{|x|} + 1$; 4) $y = \left|\frac{1}{2^x} - 1\right|$.

1.31. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3^{|x|}}$; 2) $y = 3^{|x|} - 1$; 3) $y = |3^x - 1|$.

1.32. Постройте график функции $y = \sqrt{2^{\cos x} - 2}$.

1.33. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{\sin x}$; 2) $y = 3^{|\sin x|} - 2$.

1.34. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $y = 6^{\cos x}$; 2) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{|\cos x|} + 5$.

1.35. Решите неравенство:

1) $2^{\operatorname{tg} x} > 0$; 2) $2^{\arcsin x} > -\frac{\pi}{4}$; 3) $2^{\arccos x} > \arccos x - \pi$.

1.36. Решите неравенство:

1) $2^x > \sin x - 1$; 3) $2^{\operatorname{ctg} x} > \cos x - 1$.

2) $2^x > \arcsin x - \frac{\pi}{2}$;

1.37. Постройте график функции:

1) $y = \left|2^{-|x|} - 1\right|$; 2) $y = \frac{2^{|x|} - 1}{|2^x - 1|}$.

1.38. Постройте график функции:

1) $y = \left|1 - 3^{|x|}\right|$; 2) $y = \frac{|1 - 3^{-x}|}{3^{|x|} - 1}$.

◆ ◆ ◆

1.39. Сравните $(7 + 4\sqrt{3})^{-5,2}$ и $(7 - 4\sqrt{3})^{5,6}$.

1.40. Найдите область значений функции $f(x) = 2^{(\sin x + \cos x)^2}$.

1.41. Найдите область значений функции $f(x) = 3^{(\sin x \cos x)}$.

1.42. Решите уравнение:

1) $2^{\cos x} = x^2 + 2$; 2) $2^{\sqrt{x}} = \cos x$.

1.43. Решите уравнение:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = x^2 + 1$; 2) $2^{|x|} = \cos x$.

1.44. Решите неравенство:

1) $2^{x^2} \geqslant \sin x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant |\sin x| + 1$; 3) $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1 - x^2$.

1.45. Решите неравенство:

1) $2^{x^2} > \cos x$; 2) $2^{-x^2} \geqslant x^2 + 1$.

1.46. Исследуйте на чётность функцию $y = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$.

1.47. Исследуйте на чётность функцию $y = \frac{2^x - 3^x}{2^x + 3^x}$.

1.48. Исследуйте на чётность функцию $y = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$.

1.49. Исследуйте на чётность функцию $y = (\sqrt{2}+1)^x - (\sqrt{2}-1)^x$.

1.50. Найдите область значений функции $y = \dfrac{2^x - 1}{2^x - 4}$.

1.51. Найдите область значений функции $y = \dfrac{3^x}{3^x - 9}$.

1.52. Существуют ли такие иррациональные числа a и b, что a^b — рациональное число?

§ 2 Показательные уравнения

Рассмотрим уравнения
$$2^x = 8,$$
$$3^x \cdot 3^{x-1} = 4,$$
$$0{,}3^{x-4} = 0{,}3^{x^2}.$$

Во всех этих уравнениях переменная содержится только в показателе степени. Данные уравнения — примеры **показательных уравнений.**

При решении многих показательных уравнений используют следующую теорему.

Теорема 2.1

При $a > 0$ и $a \neq 1$ равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$.

Доказательство

Очевидно, что если $x_1 = x_2$, то $a^{x_1} = a^{x_2}$.

Докажем, что из равенства $a^{x_1} = a^{x_2}$ следует равенство $x_1 = x_2$. Предположим, что $x_1 \neq x_2$, то есть $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$. Пусть, например, $x_1 < x_2$.

Рассмотрим показательную функцию $y = a^x$. Она является либо возрастающей, либо убывающей. Тогда из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $a^{x_1} < a^{x_2}$ (при $a > 1$) или $a^{x_1} > a^{x_2}$ (при $0 < a < 1$). Однако по условию выполняется равенство $a^{x_1} = a^{x_2}$. Получили противоречие.

Аналогично получают противоречие для случая, когда $x_1 > x_2$. Таким образом, $x_1 = x_2$. ■

Следствие

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то уравнение
$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \qquad (1)$$
равносильно уравнению
$$f(x) = g(x). \qquad (2)$$

Доказательство

Пусть x_1 — корень уравнения (1), то есть $a^{f(x_1)} = a^{g(x_1)}$. Тогда по теореме 2.1 получаем, что $f(x_1) = g(x_1)$. Следовательно, x_1 — корень уравнения (2).

Пусть x_2 — корень уравнения (2), то есть $f(x_2) = g(x_2)$. Отсюда $a^{f(x_2)} = a^{g(x_2)}$.

Мы показали, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2) и наоборот, каждый корень уравнения (2) является корнем уравнения (1). Следовательно, уравнения (1) и (2) равносильны. ■

Рассмотрим примеры решения показательных уравнений.

Пример 1. Решите уравнение $0{,}125^x = 128$.

Решение. Представим каждую из частей уравнения в виде степени с основанием 2. Имеем: $0{,}125 = \frac{1}{8} = 2^{-3}$ и $128 = 2^7$. Запишем:

$$(2^{-3})^x = 2^7;\ 2^{-3x} = 2^7.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$-3x = 7.$$

Отсюда $x = -\frac{7}{3}$.

Ответ: $-\frac{7}{3}$. ■

Пример 2. Решите уравнение $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot (10^{x-1})^3$.

Решение. Воспользовавшись свойствами степени, представим каждую из частей уравнения в виде степени с основанием 10. Имеем:

$$(2 \cdot 5)^{x^2-3} = 10^{-2} \cdot 10^{3x-3};$$
$$10^{x^2-3} = 10^{3x-5}.$$

Переходим к равносильному уравнению:

$$x^2 - 3 = 3x - 5.$$

Отсюда $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Ответ: 1; 2. ■

Пример 3. Решите уравнение $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$.

Решение. Имеем: $2^{12x-1} - 2^{12x-2} + 2^{12x-3} - 2^{12x-4} = 1280$;

$$2^{12x-4}(2^3 - 2^2 + 2^1 - 1) = 1280;$$
$$2^{12x-4} \cdot 5 = 1280;$$
$$2^{12x-4} = 256;\ \ 2^{12x-4} = 2^8;$$
$$12x - 4 = 8;\ x = 1.$$

Ответ: 1. ■

Пример 4. Решите уравнение $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x+1} = 5^{x+1} + 4 \cdot 5^x$.

Решение. Имеем: $3^x(2 \cdot 3^2 - 3) = 5^x(5 + 4)$; $3^x \cdot 15 = 5^x \cdot 9$;

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{9}{15};\ \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{3}{5};\ x = 1.$$

Ответ: 1. ■

Пример 5. Решите уравнение $25^x + 4 \cdot 5^x - 5 = 0$.

Решение. Поскольку $25^x = (5^2)^x = 5^{2x} = (5^x)^2$, то данное уравнение удобно решать методом замены переменной.

Пусть $5^x = t$. Тогда данное уравнение можно переписать так:

$$t^2 + 4t - 5 = 0.$$

Отсюда $t = 1$ или $t = -5$.

Если $t = 1$, то $5^x = 1$. Отсюда $5^x = 5^0$; $x = 0$.

Если $t = -5$, то $5^x = -5$. Так как $5^x > 0$ при любом x, то уравнение $5^x = -5$ не имеет корней.

Ответ: 0. ■

Пример 6. Решите уравнение $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

Решение. Имеем: $4 \cdot 2^{2x} - 2^x \cdot 3^x - 18 \cdot 3^{2x} = 0$.

Так как $3^{2x} \neq 0$ при любом x, то, разделив обе части уравнения на 3^{2x}, получим уравнение, равносильное данному:

$$4 \cdot \frac{2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0;$$

$$4 \cdot \left(\frac{2^x}{3^x}\right)^2 - \frac{2^x}{3^x} - 18 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$. Тогда можно записать:

$$4t^2 - t - 18 = 0.$$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$ Имеем: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}. \end{array}\right.$

Поскольку $\left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ при любом x, то первое уравнение совокупности решений не имеет. Второе уравнение совокупности перепишем так:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Отсюда $x = -2$.

Ответ: -2. ■

Пример 7. Решите уравнение $2^x + 5^x = 7^x$.

Решение. Очевидно, что $x = 1$ — корень данного уравнения. Покажем, что этот корень единственный.

Разделив обе части исходного уравнения на 7^x, получим:

$$\left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x = 1.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{2}{7}\right)^x + \left(\frac{5}{7}\right)^x$. Так как функции $y = \left(\frac{2}{7}\right)^x$ и $y = \left(\frac{5}{7}\right)^x$ убывающие, то функция f также является убывающей, а следовательно, каждое своё значение она принимает только один раз. Поэтому уравнение $f(x) = 1$ имеет единственный корень.

Ответ: 1. ■

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a + 3)2^x + 4a - 4 = 0$ имеет единственный корень?

Решение. Пусть $2^x = t$. Имеем: $t^2 - (a + 3)t + 4a - 4 = 0$. Отсюда $t_1 = 4$, $t_2 = a - 1$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x = 4, \\ 2^x = a - 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение совокупности имеет единственный корень $x = 2$. Второе уравнение совокупности при каждом значении параметра a или имеет один корень, или вообще не имеет корней.

Для выполнения условия задачи второе уравнение совокупности должно либо не иметь корней, либо иметь единственный корень, равный 2.

Если $a - 1 \leqslant 0$, т. е. $a \leqslant 1$, то уравнение $2^x = a - 1$ корней не имеет.

Число 2 является корнем второго уравнения совокупности, если $2^2 = a - 1$. Отсюда $a = 5$.

Ответ: $a \leqslant 1$ или $a = 5$. ■

?

1. Опишите, какое уравнение называют показательным.

2. Сформулируйте теоремы, которые используют при решении показательных уравнений.

Упражнения

2.1. Решите уравнение:

1) $4^x = 64$;
2) $3^x = \frac{1}{81}$;
3) $0{,}6^{2x-3} = 1$;
4) $10^{-x} = 0{,}001$;
5) $2^{5-x} = 2^{3x-7}$;
6) $8^x = 16$;
7) $0{,}16^x = \frac{5}{2}$;
8) $\sqrt{5^x} = 25$;
9) $0{,}25^{x^2-4} = 2^{x^2+1}$;
10) $\left(\frac{4}{9}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$;
11) $2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^5$;
12) $\left(\frac{4}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{4}\right)^{7x-3}$;
13) $36^x = \left(\frac{1}{216}\right)^{2-x}$;
14) $5^{x^2-2x} = 6^{x^2-2x}$;
15) $3^{x-1} = 6^x \cdot 2^{-x} \cdot 3^{x+1}$.

2.2. Решите уравнение:

1) $0{,}4^{x^2-x-6} = 1$;
2) $\left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3}$;
3) $0{,}7^x = 2\frac{2}{49}$;
4) $9^{-x} = 27$;
5) $\sqrt{2^x} = 8^{-\frac{2}{3}}$;
6) $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} = 4{,}5^{x-2}$;
7) $100^x = 0{,}01\sqrt{10}$;
8) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{8}\right)^x = \frac{125}{64}$;
9) $2^{x-1} \cdot 3^{x-1} = \frac{1}{36} \cdot 6^{2x+5}$;
10) $32^{\frac{3}{5}x-2} = 4^{6-\frac{3}{2}x}$;
11) $3^{x^2-9} = 7^{x^2-9}$;
12) $16^{5-3x} = 0{,}125^{5x-6}$.

2.3. Решите уравнение:

1) $3^{x+2} + 3^x = 30$;
2) $4^{x+1} + 4^{x-2} = 260$;
3) $2^{x+4} - 2^x = 120$;
4) $7^{x+1} + 4 \cdot 7^x = 77$;
5) $5^x + 7 \cdot 5^{x-2} = 160$;
6) $6^{x+1} - 4 \cdot 6^{x-1} = 192$.

2.4. Решите уравнение:

1) $5^{x+1} + 5^x = 150$;
2) $2^x + 2^{x-3} = 18$;
3) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$;
4) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$.

2.5. Решите уравнение:

1) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$;
2) $9^x - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$;
3) $25^x - 5^x - 20 = 0$;
4) $100 \cdot 0{,}3^{2x} + 91 \cdot 0{,}3^x - 9 = 0$.

2.6. Решите уравнение:

1) $6^{2x} - 3 \cdot 6^x - 18 = 0$; 2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

2.7. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{9} \cdot \sqrt{3^{3x-1}} = 81^{-\frac{3}{4}}$;
2) $4^x \cdot 3^{x+1} = 0{,}25 \cdot 12^{3x-1}$;
3) $4 \cdot 2^{\cos x} = \sqrt{8}$;
4) $0{,}25 \cdot 2^{x^2} = \sqrt[3]{0{,}25 \cdot 4^{2x}}$;
5) $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$;
6) $\sqrt[3]{9^{2x+1}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3}}$.

2.8. Решите уравнение:

1) $\frac{\sqrt{32}}{16^{x^2}} = 8^{3x}$;
2) $9 \cdot 3^{\sin x} = \sqrt{27}$;
3) $2^{x-1} = 12^{2x} \cdot 3^{-2x} \cdot 2^{x+1}$;
4) $\sqrt[5]{7^{x+1}} = \frac{49}{\sqrt{7}}$.

2.9. Решите уравнение:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 56$;
2) $6 \cdot 5^x - 5^{x+1} - 3 \cdot 5^{x-1} = 10$;
3) $2 \cdot 7^x + 7^{x+2} - 3 \cdot 7^{x-1} = 354$;
4) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 2^{2x} = 228$;
5) $4 \cdot 9^{1{,}5x-1} - 27^{x-1} = 33$;
6) $0{,}5^{5-2x} + 3 \cdot 0{,}25^{3-x} = 5$;
7) $2^{2x+1} + 4^x - \left(\frac{1}{16}\right)^{1-0{,}5x} = 47$;
8) $4 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} - 6 \cdot 3^{x-2} = 15 \cdot 9^{x^2-1}$.

2.10. Решите уравнение:

1) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$;
2) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 17$;
3) $2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^{x-1} - 2^{x-2} = 9$;
4) $2 \cdot 3^{2x+1} + 3^{2x-1} - 5 \cdot 3^{2x} = 36$;
5) $6^{x-2} - \left(\frac{1}{6}\right)^{3-x} + 36^{\frac{x-1}{2}} = 246$;
6) $5 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 7 \cdot 2^{x-3} = 8^{x^2-1}$.

2.11. Решите уравнение:

1) $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$;
2) $4^{x+1} + 4^{1-x} = 10$;
3) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$;
4) $9^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 3$;
5) $3^{x+1} + 3^{2-x} = 28$;
6) $\frac{9}{2^x - 1} - \frac{21}{2^x + 1} = 2$.

2.12. Решите уравнение:

1) $3^{2x+1} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$;
2) $2^{3-2x} - 3 \cdot 2^{1-x} + 1 = 0$;
3) $5^x - 0{,}2^{x-1} = 4$;
4) $4^{x+0{,}5} + 7 \cdot 2^x = 4$;
5) $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0{,}2$;
6) $\frac{5}{3^x - 6} + \frac{5}{3^x + 6} = 2$.

2.13. Решите уравнение:

1) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2}$;

2) $3^{x^2+2} - 5^{x^2-1} = 5^{x^2+1} + 3^{x^2-1}$;

3) $7^x - 5^{x+2} = 2 \cdot 7^{x-1} - 118 \cdot 5^{x-1}$.

2.14. Решите уравнение:

1) $6^x + 6^{x-1} - 6^{x-2} = 7^x - 8 \cdot 7^{x-2}$;

2) $5^x - 2 \cdot 5^{x-1} = 3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2}$;

3) $2^{\sqrt{x}+1} - 3^{\sqrt{x}} = 3^{\sqrt{x}-1} - 2^{\sqrt{x}}$.

◆ ◆ ◆

2.15. Решите уравнение:

1) $27^{\frac{2}{x}} - 2 \cdot 3^{\frac{x+3}{x}} - 27 = 0$;

2) $\sqrt[3]{49^x} - 50\sqrt[3]{7^{x-3}} + 1 = 0$;

3) $2^{\sqrt{x+1}} = 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} + 1$;

4) $3^{\sqrt{x-5}} + 3^{2-\sqrt{x-5}} = 6$;

5) $5 \cdot 2^{\cos^2 x} - 2^{\sin^2 x} = 3$;

6) $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$;

7) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} - 80 = 0$.

2.16. Решите уравнение:

1) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{2x+3}{x}} - 32 = 0$;

2) $5^{\sqrt{x-2}} - 5^{1-\sqrt{x-2}} - 4 = 0$;

3) $2^{\cos 2x} - 3 \cdot 2^{\cos^2 x} + 4 = 0$.

2.17. Решите уравнение:

1) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} = 0$;

2) $2^{2x+1} - 7 \cdot 10^x + 25^{x+0,5} = 0$;

3) $7 \cdot 49^x + 3 \cdot 28^x = 4 \cdot 16^x$;

4) $9^x + 4^x = 2 \cdot 6^x$.

2.18. Решите уравнение:

1) $4 \cdot 9^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 16^x = 0$;

2) $5 \cdot 2^x + 2 \cdot 5^x = 7 \cdot 10^{\frac{x}{2}}$.

2.19. Решите уравнение $\sqrt{4^x - 2^x - 3} = \sqrt{4 \cdot 2^x - 7}$.

2.20. Решите уравнение $\sqrt{1 + 3^x - 9^x} = \sqrt{4 - 3 \cdot 3^x}$.

2.21. Решите уравнение $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4$.

2.22. Решите уравнение $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x = 8$.

2.23. Решите уравнение:

1) $4^{x+\frac{1}{2}} + \frac{2}{4^x} + 14 = 9\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)$;

2) $9^{x+\frac{1}{2}} + \frac{3}{9^x} + 26 = 16(3^x + 3^{-x})$.

2.24. При каких значениях параметра a уравнение $9^x - (a+1) \cdot 3^x + 3a - 6 = 0$ имеет единственный корень?

2.25. При каких значениях параметра a уравнение $25^x + 5^{x+1} - a^2 + a + 6 = 0$ не имеет корней?

2.26. При каких значениях параметра a уравнение $4^x - (a+1) \cdot 2^x + 2a - 2 = 0$ имеет два различных корня?

2.27. Решите уравнение:

1) $2^x = 3 - x$;
2) $3^x + 4^x = 5^x$;
3) $7^{6-x} = x + 2$;
4) $3^{x-1} + 5^{x-1} = 34$.

2.28. Решите уравнение:

1) $3^x = 11 - x$;
2) $8^{5-x} = x + 4$;
3) $4^{x-2} + 6^{x-3} = 100$;
4) $3^{x-2} = \frac{9}{x}$.

2.29. При каких значениях параметра a уравнение $(\sqrt{x} - a)(3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3) = 0$ имеет два различных корня?

2.30. При каких значениях параметра a уравнение $(\sqrt{x} - a)(2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16) = 0$ имеет два различных корня?

2.31. Решите уравнение $4^x - (19 - 3x) \cdot 2^x + 34 - 6x = 0$.

2.32. Решите уравнение $9^x - (14 - x) \cdot 3^x + 33 - 3x = 0$.

2.33. Решите уравнение $4^{\operatorname{tg} x} + 4^{\operatorname{ctg} x} = 8$.

2.34. Решите уравнение $2^{\cos x} + 2^{\sin x} = 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

2.35. При каких значениях параметра a уравнение $2^{|x|} = ax^2 + a^2$ имеет единственное решение?

2.36. При каких значениях параметра a уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} = \left(a + \frac{1}{3}\right)x^2 + a^2$ имеет единственное решение?

2.37. При каких значениях параметра a уравнение $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = (3a + 1)|x| + 2a^2$ имеет единственное решение?

2.38. При каких значениях параметра a уравнение $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 2(a - 1)x^2 + \frac{1}{2}a^2$ имеет единственное решение?

2.39. При каких значениях параметра a уравнения $4^{x+1} + 2^{x+4} = 2^{x+2} + 16$ и $|a - 9| \cdot 3^{x-2} + a \cdot 9^{x-1} = 1$ равносильны?

2.40. При каких значениях параметра a уравнения $3^x + 3^{x+3} = 3^{x+1} + 25$ и $|a - 4| \cdot 2^x + a \cdot 4^x = 4$ равносильны?

§ 3 Показательные неравенства

Неравенства $0{,}2^x < 25$, $2^x + 5^x > 1$, $7^{x^2} > 2^x$, содержащие переменную только в показателе степени, являются примерами **показательных неравенств**.

При решении многих показательных неравенств используют следующую теорему.

Теорема 3.1

При $a > 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2$; при $0 < a < 1$ неравенство $a^{x_1} > a^{x_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 < x_2$.

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей.

Следствие

Если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$; если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$.

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите это следствие самостоятельно.

Рассмотрим примеры решения показательных неравенств.

Пример 1. Решите неравенство $8 \cdot 2^{3x-1} < (0{,}5)^{-1}$.

Решение. Имеем: $2^3 \cdot 2^{3x-1} < (2^{-1})^{-1}$; $2^{3x+2} < 2^1$.

Так как основание степеней 2^{3x+2} и 2^1 больше единицы, то последнее неравенство равносильно такому:

$$3x + 2 < 1.$$

Отсюда $3x < -1$; $x < -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)$. ■

Пример 2. Решите неравенство $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$.

Решение. Имеем: $\left(\frac{4}{49}\right)^{x} \cdot \left(\frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$; $\left(\frac{4}{49} \cdot \frac{147}{20}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{81}{625}\right)^{x}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geqslant \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{4}\right)^{x}$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x} \geqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{4x}$.

Так как $0 < \frac{3}{5} < 1$, то последнее неравенство равносильно такому:

$$x \leqslant 4x;\ x \geqslant 0.$$

Ответ: $[0; +\infty)$. ■

Пример 3. Решите неравенство $4^x - 2^{2(x-1)} + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} > 52.$

Решение. Перепишем данное неравенство так:

$$2^{2x} - 2^{2x-2} + 2^{2x-4} > 52.$$

Отсюда $2^{2x-4}(2^4 - 2^2 + 1) > 52$; $2^{2x-4} \cdot 13 > 52$; $2^{2x-4} > 4$; $2^{2x-4} > 2^2$; $2x - 4 > 2$; $x > 3$.

Ответ: $(3; +\infty)$. ■

Пример 4. Решите неравенство $4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0.$

Решение. Имеем: $(2^2)^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$; $2^{-2x+1} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$; $2 \cdot 2^{-2x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

Пусть $2^{-x} = t$. Тогда $2t^2 - 7t - 4 < 0$.

Решив это неравенство, получим: $-\frac{1}{2} < t < 4$. Отсюда $-\frac{1}{2} < 2^{-x} < 4$.

Так как $2^{-x} > 0$, то $2^{-x} > -\frac{1}{2}$ при всех x. Поэтому достаточно решить неравенство $2^{-x} < 4$.

Имеем: $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Ответ: $(-2; +\infty)$. ■

Пример 5. Решите неравенство $4^x - 2 \cdot 5^{2x} + 10^x > 0.$

Решение. Имеем: $2^{2x} - 2 \cdot 5^{2x} + 2^x \cdot 5^x > 0$. Так как $5^{2x} > 0$ при любом x, то, разделив обе части последнего неравенства на 5^{2x}, получаем равносильное неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x} - 2 + \left(\frac{2}{5}\right)^x > 0.$

Пусть $\left(\frac{2}{5}\right)^x = t$. Тогда $t^2 + t - 2 > 0$. Решив это неравенство, получаем $\left[\begin{array}{l} t > 1, \\ t < -2. \end{array}\right.$ Отсюда:

$$\left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < -2. \end{array}\right.$$

Из неравенства $\left(\frac{2}{5}\right)^x > 1$ находим, что $x < 0$. Неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^x < -2$ не имеет решений.

Ответ: $(-\infty; 0)$. ■

Пример 6. Решите неравенство $3^x + 4^x > 5^x$.

Решение. Имеем: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1.$

Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$. Заметим, что $f(2) = 1$. Так как функция f — убывающая, то при $x < 2$ выполняется неравенство $f(x) > f(2)$, а при $x > 2$ выполняется неравенство $f(x) < f(2)$. Следовательно, множеством решений неравенства $f(x) > f(2)$, то есть неравенства $f(x) > 1$, является промежуток $(-\infty; 2)$.

Ответ: $(-\infty; 2)$. ■

1. Опишите, какое неравенство называют показательным.

2. Сформулируйте теоремы, которые используют при решении показательных неравенств.

Упражнения

3.1. Равносильны ли неравенства:

1) $7^{2x+4} > 7^{x-1}$ и $2x + 4 > x - 1$;

2) $0{,}9^{x^2-4} < 0{,}9^{x+2}$ и $x^2 - 4 < x + 2$;

3) $a^x > a^5$, где $a > 1$, и $x > 5$;

4) $a^x < a^{-3}$, где $0 < a < 1$, и $x < -3$?

3.2. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4}$;

2) $5^x < \frac{1}{5}$;

3) $11^{x-5} < 11^{3x+1}$;

4) $0{,}4^{6x+1} \geqslant 0{,}4^{2x+5}$;

5) $2^{x^2-1} < 8$;

6) $0{,}3^{4x-8} > 1$;

7) $0{,}1^{3x-1} < 1000$;

8) $\left(\frac{1}{36}\right)^{2-x} < 216^{x+1}$.

3.3. Решите неравенство:

1) $6^{7x-1} > 6$;

2) $10^x < 0{,}001$;

3) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{3}{2}\right)^4$;

4) $3^{2x^2-6} > \frac{1}{81}$;

5) $49^{x+1} < \left(\frac{1}{7}\right)^x$;

6) $0{,}2^{2x-9} < 1$.

3.4. Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $0{,}2 \leqslant 5^{x+4} \leqslant 125$;

2) $\frac{1}{36} \leqslant 6^{3-x} < 6$;

3) $2 < 0{,}5^{x-1} \leqslant 32$?

3.5. Найдите сумму целых решений неравенства:

1) $\frac{1}{3} < 3^{x+3} < 9$;

2) $\frac{1}{8} < 2^{2-x} \leqslant 16$.

3.6. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x}$; 2) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3^{x+2} - 27}}$.

3.7. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^x - 16}$; 2) $f(x) = \sqrt{1 - 6^{x-4}}$.

◆◆

3.8. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^{6x - x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^5$;

2) $125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x^2} \geqslant \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x}$;

3) $0{,}6^{\frac{x+5}{x^2-9}} < 1$;

4) $\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^{x-0{,}5} > \sqrt{2}$;

5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{4}{x}-3} \leqslant \frac{9}{4}$;

6) $4 \cdot 0{,}5^{x(x+3)} \geqslant 0{,}25^{2x}$.

3.9. Решите неравенство:

1) $\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2 - x} < \frac{9}{49}$;

2) $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5x^2} \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{-3x}$;

3) $0{,}3^{\frac{x^2-4}{x-1}} > 1$;

4) $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right)^{x-1} > 9^{-0{,}5}$.

3.10. Решите неравенство:

1) $7^{x+2} - 14 \cdot 7^x > 5$;

2) $9 \cdot 3^{x-1} + 3^x < 36$;

3) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} > 56$;

4) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} \geqslant 26$;

5) $2 \cdot 6^x + 3 \cdot 6^{x+3} \leqslant 650$;

6) $\left(\frac{3}{4}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} > \frac{3}{16}$.

3.11. Решите неравенство:

1) $3^{x+2} - 4 \cdot 3^x < 45$;

2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^x \leqslant 3$;

3) $5^x + 5^{x-1} - 5^{x-2} > 145$;

4) $\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} < 1\frac{2}{3}$.

3.12. Решите неравенство:

1) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x - 45 > 0$;

2) $4^x + 2^{x+3} - 20 < 0$;

3) $49^x - 8 \cdot 7^x + 7 \leqslant 0$;

4) $0{,}25^x - 12 \cdot 0{,}5^x + 32 \geqslant 0$;

5) $6^{2x-1} - \frac{1}{3} \cdot 6^x - 4 \leqslant 0$;

6) $25^x + 5^x - 30 \geqslant 0$.

3.13. Решите неравенство:

1) $9^{x+1} - 2 \cdot 3^x - 7 \leqslant 0$;

2) $2^x + 2^{\frac{x}{2}} - 72 \geqslant 0$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2 > 0$;

4) $25^x - 26 \cdot 5^x + 25 \leqslant 0$.

3.14. Решите неравенство:

1) $\dfrac{5^x - 125}{x^2 - 4x + 4} \leqslant 0$;

2) $\dfrac{2^x - 1}{x - 1} > 0$.

3.15. Решите неравенство:

1) $\dfrac{16 - 4^x}{9x^2 + 12x + 4} \geqslant 0$;

2) $\dfrac{5^x - 0{,}04}{5 - x} \geqslant 0$.

3.16. Решите неравенство:

1) $2^{3x+1} + 0{,}25^{\frac{1-3x}{2}} - 4^{\frac{3x}{2}} > 192$;

2) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} > 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

3.17. Решите неравенство:

1) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$;

2) $2 \cdot 16^x - 3 \cdot 2^{4x-1} + 7 \cdot 4^{2x-2} \leqslant 120$.

3.18. Найдите множество решений неравенства:

1) $3^x - 9 \cdot 3^{-x} - 8 > 0$;

2) $2^{x+3} + 2^{1-x} < 17$;

3) $6^{x+2} + 6^{-x} - 37 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} \leqslant \frac{6}{5}$.

3.19. Найдите множество решений неравенства:

1) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{1-x} > 7$;

2) $4^{1-x} - 0{,}5^{1-2x} \geqslant 1$.

3.20. Решите неравенство $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \leqslant 1$.

3.21. Решите неравенство $3^{\sqrt{x}} - 3^{2-\sqrt{x}} \leqslant 8$.

◆ ◆ ◆

3.22. Решите неравенство:

1) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x < 0$;

2) $5 \cdot 25^{\frac{1}{x}} + 3 \cdot 10^{\frac{1}{x}} \geqslant 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}}$.

3.23. Решите неравенство:

1) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x - 5 \cdot 36^x < 0$;

2) $2 \cdot 49^{\frac{1}{x}} - 9 \cdot 14^{\frac{1}{x}} + 7 \cdot 4^{\frac{1}{x}} \geqslant 0$.

3.24. Решите неравенство:

1) $x^2 \cdot 2^x + 1 > x^2 + 2^x$;

2) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$.

3.25. Решите неравенство $x^2 \cdot 3^x + 9 < x^2 + 3^{x+2}$.

3.26. Решите уравнение $|3^x - 1| + |3^x - 9| = 8$.

3.27. Решите уравнение $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$.

3.28. Решите неравенство:

1) $5^x > 6 - x$;

2) $5^x + 12^x < 13^x$.

3.29. Решите неравенство $10^{4-x} > 7 + x$.

3.30. Решите неравенство $(2^x - 2)\sqrt{x^2 - x - 6} \geqslant 0$.

3.31. Решите неравенство $(3^x - 9)\sqrt{x^2 - 2x - 8} \leqslant 0$.

3.32. Для каждого значения параметра a решите неравенство $(x-a)\sqrt{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x} \geqslant 0$.

3.33. Для каждого значения параметра a решите неравенство $(x-a)\sqrt{6\cdot 5^x - 5\cdot 6^x} \leqslant 0$.

3.34. При каких значениях параметра a неравенство $4^{\cos x} - 2(a-3)\cdot 2^{\cos x} + a + 3 > 0$ выполняется при всех действительных x?

3.35. При каких значениях параметра m неравенство $(m+2)\cdot 4^{|x-1|} - 2m\cdot 2^{|x-1|} + 3m + 1 > 0$ выполняется при всех действительных x?

§ 4 Логарифм и его свойства

Легко решить уравнения $2^x = 4$ и $2^x = 8$. Их корнями будут соответственно числа 2 и 3.

Однако для уравнения $2^x = 5$ сразу указать корень сложно.

Возникает естественный вопрос: есть ли вообще корни у этого уравнения?

Обратимся к графической интерпретации. На рисунке 4.1 изображены графики функций $y = 2^x$ и $y = 5$. Они пересекаются в некоторой точке $A\,(x_0;\,5)$. Следовательно, уравнение $2^x = 5$ имеет единственный корень x_0.

Однако графический метод не позволяет определить точное значение x_0.

С подобной ситуацией мы встречались, решая в 10 классе уравнение $x^3 = 5$. Сразу указать его корень тоже сложно, а графическая интерпретация показывает, что это уравнение имеет единственный корень (рис. 4.2). Необходимость называть и записывать этот корень в своё время привела к новому понятию «кубический корень» и обозначению $\sqrt[3]{5}$.

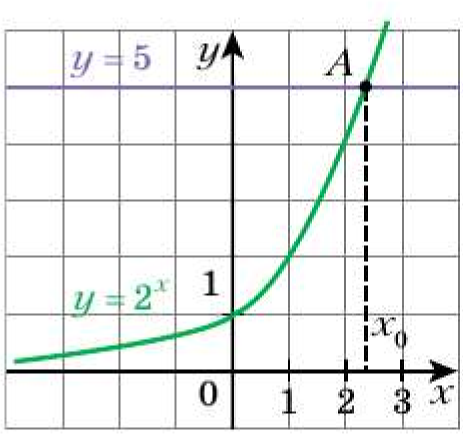


Рис. 4.1

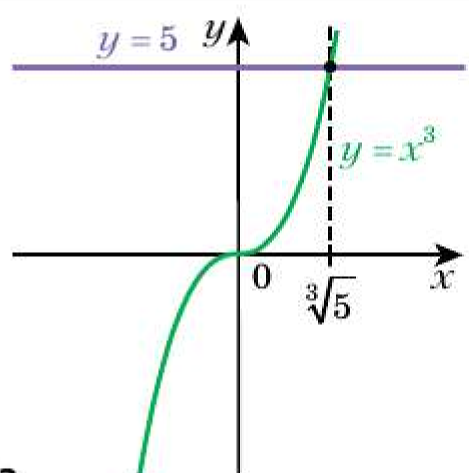


Рис. 4.2

Корень уравнения $2^x = 5$ договорились называть **логарифмом числа 5 по основанию** 2 и обозначать $\log_2 5$. Таким образом, число $\log_2 5$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 2, чтобы получить число 5. Можно записать:

$$2^{\log_2 5} = 5.$$

Рассмотрим уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Так как для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $a^x > 0$, то при $b \leqslant 0$ это уравнение не имеет решений. Если $b > 0$, то это уравнение имеет единственный корень (рис. 4.3). Его называют логарифмом числа b по основанию a и обозначают $\log_a b$.

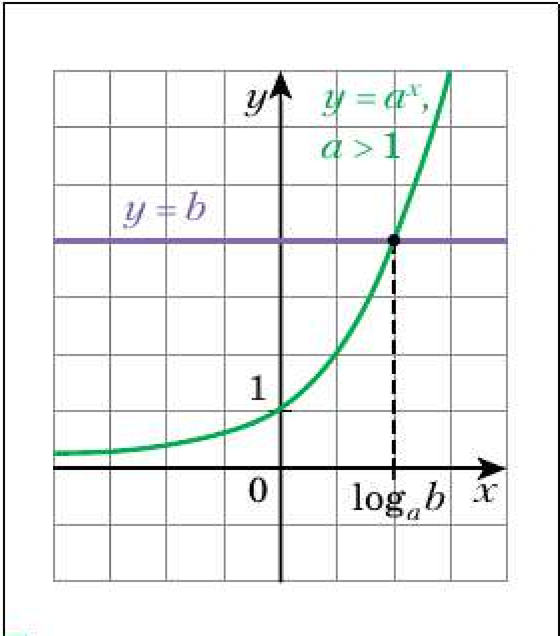


Рис. 4.3

Определение

Логарифмом положительного числа b по основанию a, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

Например, $\log_3 9$ — это показатель степени, в которую надо возвести число 3, чтобы получить число 9. Имеем: $\log_3 9 = 2$, поскольку $3^2 = 9$.

Ещё несколько примеров:

$$\log_2 \frac{1}{8} = -3, \text{ так как } 2^{-3} = \frac{1}{8};$$

$$\log_{25} 5 = \frac{1}{2}, \text{ так как } 25^{\frac{1}{2}} = 5;$$

$$\log_{17} 17 = 1, \text{ так как } 17^1 = 17;$$

$$\log_{100} 1 = 0, \text{ так как } 100^0 = 1.$$

Из определения логарифма следует, что при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ выполняется равенство

$$\boxed{\boldsymbol{a^{\log_a b} = b}}$$

Его называют **основным логарифмическим тождеством.**

Например, $7^{\log_7 3} = 3$, $0{,}3^{\log_{0,3} 5} = 5$.

Также из определения логарифма следует, что при $a > 0$ и $a \neq 1$

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a 1 = 0}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\log_a a = 1}}$$

Рассмотрим равенство $a^c = b$.

Вы знаете, что действие нахождения числа b по данным числам a и c называют возведением числа a в степень c.

Действие нахождения числа c по данным числам a и b, где $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, называют **логарифмированием числа b по основанию a**. Действительно, $c = \log_a b$.

Отметим, что при $a > 0$ левая часть равенства $a^c = b$ положительна. Следовательно, $b > 0$.

Поэтому при $b \leqslant 0$ выражение $\log_a b$ не имеет смысла.

Логарифм по основанию 10 называют **десятичным логарифмом**. Вместо $\log_{10} b$ пишут $\lg b$.

Используя это обозначение и основное логарифмическое тождество, для каждого $b > 0$ можно записать: $10^{\lg b} = b$.

Рассмотрим основные свойства логарифмов.

Теорема 4.1

(логарифм произведения)

Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство

$$\boxed{\log_a xy = \log_a x + \log_a y}$$

Коротко формулируют: *логарифм произведения равен сумме логарифмов*.

Доказательство

Рассмотрим выражения: $a^{\log_a xy}$ и $a^{\log_a x + \log_a y}$. Докажем, что они равны.

Используя основное логарифмическое тождество и свойства степени, запишем:

$$a^{\log_a xy} = xy;$$

$$a^{\log_a x + \log_a y} = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = xy.$$

Следовательно, $a^{\log_a xy} = a^{\log_a x + \log_a y}$. Отсюда по теореме 2.1 получаем, что $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$. ■

Теорема 4.2

(логарифм частного)

Если $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то выполняется равенство

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$$

Коротко формулируют: *логарифм частного равен разности логарифмов*.

Воспользовавшись идеей доказательства теоремы 4.1, докажите эту теорему самостоятельно.

Теорема 4.3

Если $x > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, то для любого $\beta \in R$ выполняется равенство

$$\boxed{\log_a x^\beta = \beta \log_a x}$$

Доказательство

Рассмотрим выражения: $a^{\log_a x^\beta}$ и $a^{\beta \log_a x}$. Докажем, что они равны.

Имеем: $a^{\log_a x^\beta} = x^\beta$;

$a^{\beta \log_a x} = (a^{\log_a x})^\beta = x^\beta$.

Следовательно, $a^{\log_a x^\beta} = a^{\beta \log_a x}$. Отсюда по теореме 2.1 получаем: $\log_a x^\beta = \beta \log_a x$. ■

Теорема 4.4

(переход от одного основания логарифма к другому)

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$ и $c \neq 1$, то выполняется равенство

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Доказательство

Рассмотрим выражение $\log_a b \cdot \log_c a$. Преобразуем его, воспользовавшись теоремой 4.3 при $\beta = \log_a b$. Имеем:

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c a^{\log_a b} = \log_c b.$$

Следовательно, $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$. Так как $a \neq 1$, то $\log_c a \neq 0$. Теперь можно записать: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$. ■

Следствие 1

Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $b \neq 1$, то выполняется равенство

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Докажите этот следствие самостоятельно.

Следствие 2

Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$, то для любого $\beta \neq 0$ выполняется равенство

$$\boxed{\log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b}$$

Доказательство

В выражении $\log_{a^\beta} b$ перейдём к основанию a и применим теорему 4.3:

$$\log_{a^\beta} b = \frac{\log_a b}{\log_a a^\beta} = \frac{\log_a b}{\beta \log_a a} = \frac{1}{\beta}\log_a b. \blacksquare$$

Пример 1. Решите уравнение: 1) $3^x = 7$; 2) $0{,}4^{2x-5} = 9$.

Решение. 1) Из определения логарифма следует, что $x = \log_3 7$.

2) Имеем: $2x - 5 = \log_{0,4} 9$; $2x = \log_{0,4} 9 + 5$; $x = \dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$.

Ответ: 1) $\log_3 7$; 2) $\dfrac{\log_{0,4} 9 + 5}{2}$. $\blacksquare$

Пример 2. Вычислите значение выражения: 1) $10^{2+2\lg 7}$; 2) $9^{\log_3 4 - 0,5}$.

Решение. 1) Применяя свойства степени и основное логарифмическое тождество, получаем:

$$10^{2+2\lg 7} = 10^2 \cdot 10^{2\lg 7} = 100 \cdot (10^{\lg 7})^2 = 100 \cdot 7^2 = 4900.$$

2) Имеем:

$$9^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4 - 0,5} = (3^2)^{\log_3 4} : (3^2)^{0,5} = (3^{\log_3 4})^2 : 3 = 4^2 : 3 = \frac{16}{3}. \blacksquare$$

Пример 3. При каком значении x выполняется равенство:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = -5$; 2) $\log_x 16 = 4$?

Решение. 1) Выражение $\log_{\frac{1}{2}} x$ определено при $x > 0$. Из определения логарифма следует, что $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = x$, т. е. $x = 32$.

2) Выражение $\log_x 16$ определено при $x > 0$ и $x \neq 1$. Согласно определению логарифма имеем: $x^4 = 16$. Учитывая, что $x > 0$, получаем: $x = 2$.

Ответ: 1) при $x = 32$; 2) при $x = 2$. $\blacksquare$

Пример 4. Вычислите значение выражения:

1) $\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15$; 2) $\frac{1}{2}\log_{36} 9 + \frac{1}{3}\log_{36} 8$.

Решение. 1) Применяя теоремы о логарифме произведения и логарифме частного, получаем:

$$\log_2 20 + \log_2 12 - \log_2 15 = \log_2(20 \cdot 12) - \log_2 15 = \log_2 \frac{20 \cdot 12}{15} = \log_2 16 = 4.$$

2) Имеем: $\frac{1}{2}\log_{36}9 + \frac{1}{3}\log_{36}8 = \frac{1}{2}\log_{36}3^2 + \frac{1}{3}\log_{36}2^3 = \frac{1}{2} \cdot 2\log_{36}3 + \frac{1}{3} \cdot 3\log_{36}2 = \log_{36}3 + \log_{36}2 = \log_{36}6 = \frac{1}{2}$. ■

Пример 5. Постройте график функции $f(x) = 5^{\log_5(x-3)}$.

Решение. Данная функция определена на множестве $D(f) = (3; +\infty)$. Так как $5^{\log_5(x-3)} = x - 3$ для всех значений $x \in D(f)$, то графиком функции f является часть прямой $y = x - 3$ (рис. 4.4). ■

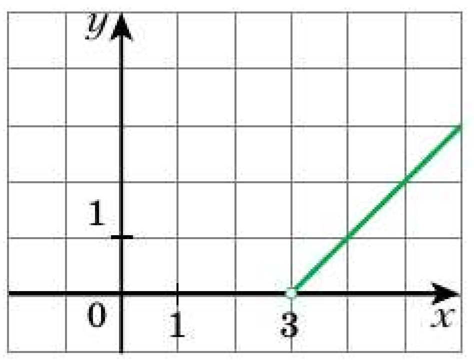


Рис. 4.4

Пример 6. Известно, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\lg 56$.

Решение. Имеем: $\lg 56 = \lg(8 \cdot 7) = \lg 8 + \lg 7 = \lg 2^3 + \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = 3\lg 2 + \log_2 7 \cdot \lg 2 = 3a + ba$.

Ответ: $3a + ba$. ■

1. Что называют логарифмом положительного числа b по основанию a?
2. Какое равенство называют основным логарифмическим тождеством?
3. Сформулируйте теоремы о свойствах логарифмов.

Упражнения

4.1. Верно ли равенство:

1) $\log_7 \frac{1}{49} = -3$;
2) $\log_{25} 5 = 2$;
3) $\log_5 125 = \frac{1}{3}$;
4) $\log_3 \frac{1}{81} = -4$;
5) $\log_{0,01} 10 = 2$;
6) $\lg 0,0001 = -4$;
7) $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt[3]{3} = \frac{2}{3}$;
8) $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$?

4.2. Найдите логарифм по основанию 2 числа:

1) 1;
2) 2;
3) 32;
4) $\sqrt{2}$;
5) 0,5;
6) $\frac{1}{8}$;
7) $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
8) $2\sqrt{2}$.

4.3. Найдите логарифм по основанию 3 числа:

1) 3; 3) 1; 5) $\frac{1}{9}$; 7) $\sqrt{3}$;

2) $\frac{1}{3}$; 4) 81; 6) $\frac{1}{243}$; 8) $3\sqrt{3}$.

4.4. Найдите логарифм по основанию $\frac{1}{2}$ числа:

1) 1; 3) 8; 5) $\frac{1}{16}$; 7) $\sqrt{2}$;

2) 2; 4) 0,25; 6) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 8) 64.

4.5. Найдите логарифм по основанию $\frac{1}{3}$ числа:

1) $\frac{1}{9}$; 2) $\frac{1}{27}$; 3) 3; 4) 81; 5) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; 6) $\sqrt[3]{3}$.

4.6. Найдите десятичный логарифм числа:

1) 1; 2) 1000; 3) 0,1; 4) 0,00001.

4.7. Чему равен логарифм числа 10 000 по основанию:

1) 10; 3) $\sqrt{10}$; 5) 1000;

2) 100; 4) 0,1; 6) 0,0001?

4.8. Найдите логарифм числа 729 по основанию:

1) 27; 2) 9; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{3}$.

4.9. Решите уравнение:

1) $\log_7 x = -1$; 4) $\log_2 x = 0$; 7) $\log_x 2 = 2$;

2) $\log_4 x = \frac{1}{2}$; 5) $\log_x 9 = 2$; 8) $\log_x 5 = \frac{1}{3}$.

3) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; 6) $\log_x 0{,}25 = -2$;

4.10. Решите уравнение:

1) $\log_6 x = 2$; 3) $\log_{0,2} x = -3$; 5) $\log_x 81 = 4$;

2) $\log_{\sqrt[3]{5}} x = \frac{3}{2}$; 4) $\log_x 6 = 5$; 6) $\log_x 11 = -1$.

4.11. Решите уравнение:

1) $6^x = 2$; 3) $0{,}4^x = 9$; 5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2$;

2) $5^x = 10$; 4) $2^{x-3} = 5$; 6) $0{,}3^{3x+2} = 7$.

4.12. Решите уравнение:

1) $3^x = 2$; 2) $10^x = \frac{1}{6}$; 3) $7^{x+5} = 9$; 4) $0{,}6^{5x-2} = 20$.

4.13. Вычислите:

1) $2^{\log_2 32}$;
2) $5^{\log_5 0{,}45}$;
3) $7^{2\log_7 2}$;
4) $64^{0{,}5\log_2 12}$;
5) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 6}$;
6) $6^{1+\log_6 5}$;
7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}} 8-2}$;
8) $6^{\log_{\frac{1}{6}} 3}$.

4.14. Вычислите:

1) $3^{\log_3 \frac{1}{27}}$;
2) $5^{\frac{1}{2}\log_5 49}$;
3) $4^{\log_2 9}$;
4) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2\log_3 12}$;
5) $10^{2+\lg 8}$;
6) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 6-3}$.

4.15. Найдите значение выражения:

1) $\log_6 3+\log_6 2$;
2) $\log_5 100-\log_5 4$;
3) $\log_{49} 84-\log_{49} 12$;
4) $\log_2 5-\log_2 35+\log_2 56$;
5) $\dfrac{\log_5 64}{\log_5 4}$;
6) $2\lg 5+\dfrac{1}{2}\lg 16$.

4.16. Вычислите значение выражения:

1) $\lg 8+\lg 12{,}5$;
2) $\log_3 162-\log_3 2$;
3) $\dfrac{\log_7 125}{\log_7 5}$;
4) $3\log_6 2+\dfrac{3}{4}\log_6 81$.

4.17. Представьте:
1) число 2 в виде степени числа 5;
2) число $\frac{1}{9}$ в виде степени числа 10;
3) число $\sqrt{14}$ в виде степени числа 7;
4) число 0,17 в виде степени числа 18.

4.18. Представьте:
1) число 3 в виде степени числа 8;
2) число $\sqrt[3]{6}$ в виде степени числа $\frac{1}{2}$.

4.19. Представьте:
1) число 6 в виде логарифма по основанию 2;
2) число -1 в виде логарифма по основанию 0,4;
3) число $\frac{1}{2}$ в виде логарифма по основанию 9;
4) число $\frac{2}{7}$ в виде логарифма по основанию 10.

4.20. Представьте:

1) число 4 в виде логарифма по основанию $\frac{1}{3}$;

2) число -2 в виде логарифма по основанию $\sqrt{2}$.

4.21. Вычислите:

1) $2^{3\log_2 5+4}$;

2) $8^{1-\log_2 3}$;

3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9 2-3}$;

4) $7^{2\log_7 3+\log_{\sqrt{7}} 4}$;

5) $9^{2\log_3 2+4\log_{81} 2}$;

6) $2\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 8-2\lg 2}$;

7) $\lg(25^{\log_5 0,8}+9^{\log_3 0,6})$;

8) $27^{\frac{1}{\log_5 3}}+25^{\frac{1}{\log_2 5}}-36^{\frac{1}{\log_9 6}}$.

4.22. Вычислите:

1) $2^{4\log_2 3-1}$;

2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{25} 9+2}$;

3) $8^{1-\frac{1}{3}\log_2 12}$;

4) $6^{\frac{1}{2}\log_6 9-\log_{\frac{1}{6}} 3}$;

5) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 5}$;

6) $1000^{\frac{1}{2}\lg 25-3\lg 2}$;

7) $\log_{13}\left(100^{\frac{1}{\log_7 10}}+2^{\log_2 15+3}\right)$;

8) $5^{\log_5 4\cdot\log_2 3}$.

4.23. Вычислите:

1) $\log_2\log_5\sqrt[8]{5}$;

2) $\log_{\frac{2}{3}}\log_{49}343$;

3) $\log_9\log_2 8$;

4) $\log_3 \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

5) $\log_4 \sin\frac{\pi}{4}$.

4.24. Вычислите:

1) $\log_3\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{125}$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}\log_4 64$;

3) $\log_6 \operatorname{tg}225^\circ$;

4) $\log_{\sqrt{3}} \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}$.

4.25. Найдите x, если:

1) $\log_7 x = 2\log_7 8 - 4\log_7 2$;

2) $\lg x = 2 + \lg 3 - \lg 5$;

3) $\log_3 x = \frac{2}{3}\log_3 216 + \frac{1}{2}\log_3 25$;

4) $\lg x = \frac{2}{3}\lg 32 - \frac{1}{3}\lg 128 + 1$;

5) $\log_2 x = 3\log_2 5 - 2\log_2 25 - \lg 10$.

4.26. Найдите x, если:

1) $\log_a x = 3\log_a 2 + 2\log_a 3$;

2) $\log_a x = \dfrac{1}{4}\log_a 16 + 3\log_a 0{,}5$;

3) $\lg x = \dfrac{2}{5}\lg 32 - \dfrac{1}{3}\lg 64 + 1$.

4.27. Вычислите значение выражения:

1) $\dfrac{\log_7 27 - 2\log_7 3}{\log_7 45 + \log_7 0{,}2}$; 2) $\dfrac{\log_9 125 + 3\log_9 2}{\log_9 1{,}2 - \log_9 12}$.

4.28. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3\lg 4 + \lg 0{,}5}{\lg 9 - \lg 18}$; 2) $\dfrac{\lg 625 - 8\lg 2}{\frac{1}{2}\lg 256 - 2\lg 5}$.

4.29. Вычислите значение выражения:

1) $\log_7 \sin\dfrac{\pi}{5} \cdot \log_{\sin\frac{\pi}{5}} 49$; 2) $\log_3 \cos^2\dfrac{\pi}{9} \cdot \log_{\cos\frac{\pi}{9}} 9$.

4.30. Упростите выражение:

1) $\log_{\sqrt{b}} a \cdot \log_a b^3$; 2) $\log_{\sqrt[3]{2}} 5 \cdot \log_5 8$.

4.31. Вычислите значение выражения $5^{\frac{4}{\log_{\sqrt{3}} 5} + \frac{1}{2}\log_5 4} + 36\log_2 \sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

4.32. Вычислите значение выражения $6^{\frac{6}{\log_{\sqrt{2}} 6} + \frac{1}{3}\log_6 27} - 12\log_7 \sqrt[5]{7\sqrt[4]{7}}$.

4.33. Упростите выражение $\dfrac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1)\log_a \frac{a}{b}}$.

4.34. Упростите выражение $\dfrac{\log_a ab(\log_b a - 1 + \log_a b)}{1 + \log_a^3 b}$.

◆ ◆ ◆

4.35. Докажите, что значение выражения $\log_{7+4\sqrt{3}}(7 - 4\sqrt{3})$ является целым числом.

4.36. Докажите, что значение выражения $\log_{9-4\sqrt{5}}(9 + 4\sqrt{5})$ является целым числом.

4.37. При каких значениях x верно равенство:

1) $\log_2(1 - x^2) = \log_2(1 - x) + \log_2(1 + x)$;

2) $\lg\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lg(x^2 - 2x + 1) - \lg(x^2 + 1)$;

3) $\log_5(x^2 - 4x + 4) = 2\log_5(2 - x)$;

4) $\log_5(x^2 - 4x + 4) = 2\log_5|x - 2|$?

4.38. Чему равно значение выражения:

1) $\lg\sin 1^\circ \cdot \lg\sin 2^\circ \cdot \lg\sin 3^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\sin 89^\circ \cdot \lg\sin 90^\circ$;

2) $\lg\operatorname{tg} 10^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 15^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \ldots \cdot \lg\operatorname{tg} 75^\circ \cdot \lg\operatorname{tg} 80^\circ$;

3) $\lg(\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 32^\circ \cdot \operatorname{tg} 34^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 58^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ)$;

4) $\lg\operatorname{tg}1^\circ + \lg\operatorname{tg}2^\circ + \lg\operatorname{tg}3^\circ + \ldots + \lg\operatorname{tg}88^\circ + \lg\operatorname{tg}89^\circ$?

4.39. Упростите выражение $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \ldots \cdot \log_{10} 9$.

4.40. Вычислите значение выражения $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 32$.

4.41. Постройте график функции:

1) $y = \lg\operatorname{tg} x + \lg\operatorname{ctg} x$;

2) $y = \log_x 1$;

3) $y = 3^{\log_3(x+3)}$;

4) $y = 5^{-\log_5 x}$;

5) $y = 10^{\frac{1}{\log_x 10}}$;

6) $y = 2^{\log_2 x^2}$;

7) $y = \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x}{\log_{\frac{1}{2}} x}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{3-x}(3-x)^4$;

9) $y = 2^{\log_4 x^2}$.

4.42. Постройте график функции:

1) $y = 7^{\log_7(x+2)}$;

2) $y = \dfrac{1}{3}^{\log_{\frac{1}{3}}(x-1)}$;

3) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_2 x^2}$;

4) $y = \log_x x$;

5) $y = \dfrac{\lg(x^2+1)}{\lg(x^2+1)}$;

6) $y = x^{\log_x 2x}$;

7) $y = \log_3 \log_{x+1}(x+1)^{27}$;

8) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-2) \cdot \log_{x-2} \dfrac{1}{3}$.

4.43. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

1) $\lg xy = \lg x + \lg y$;

2) $\lg xy = \lg(-x) + \lg(-y)$;

3) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2\lg|x| + 2\lg|y|$;

4) $\log_{x^2} y^2 = \log_x(-y)$.

4.44. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

1) $\lg\dfrac{x}{y} = \lg(-x) - \lg(-y)$;

2) $\lg x^2 + \lg y^2 = 2\lg x + 2\lg(-y)$;

3) $\log_{x^2} y^2 = \log_x y$.

4.45. Члены геометрической прогрессии являются положительными числами. Докажите, что логарифмы последовательных членов этой прогрессии по любому основанию образуют арифметическую прогрессию.

4.46. Выразите $\log_{ab} x$ через $\log_a x$ и $\log_b x$.

4.47. Докажите, что $\dfrac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$.

4.48. Найдите $\log_{ab} b$, если $\log_{ab} a = 4$.

4.49. Найдите $\log_{45} 60$, если $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$.

4.50. Найдите:

1) $\log_8 9$, если $\log_{12} 18 = a$; 2) $\log_5 6$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

4.51. Найдите $\log_{30} 8$, если $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

§ 5 Логарифмическая функция и её свойства

Выберем положительное число a, отличное от 1. Каждому положительному числу x можно поставить в соответствие число y такое, что $y = \log_a x$. Такое правило задаёт функцию $f(x) = \log_a x$ с областью определения $D(f) = (0; +\infty)$.

Эту функцию называют **логарифмической.**

Покажем, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является обратной к показательной функции $g(x) = a^x$.

Для любого $y_0 \in \boldsymbol{R}$ уравнение $\log_a x = y_0$ имеет корень (он равен a^{y_0}).

Это означает, что *областью значений логарифмической функции является множество* $\boldsymbol{R}$.

Имеем: $D(f) = E(g) = (0; +\infty)$;

$E(f) = D(g) = \boldsymbol{R}$.

Для любого $x \in D(f) = (0; +\infty)$ выполняется равенство $a^{\log_a x} = x$. Иными словами, $g(f(x)) = x$ для всех $x \in D(f)$. Сказанное означает, что f и g — взаимно обратные функции.

Так как графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$, то, пользуясь графиком показательной функции $y = a^x$, можно построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ (рис. 5.1).

Функция $y = \log_a x$ имеет единственный нуль: $x = 1$.

Функция $y = \log_a x$ имеет два промежутка знакопостоянства. Если $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$; $y > 0$ на $(1; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$; $y > 0$ на $(0; 1)$.

Если функция возрастающая (убывающая), то обратная к ней функция является также возрастающей (убывающей). Показательная функция $y = a^x$ является возрастающей при $a > 1$ и убывающей при $0 < a < 1$.

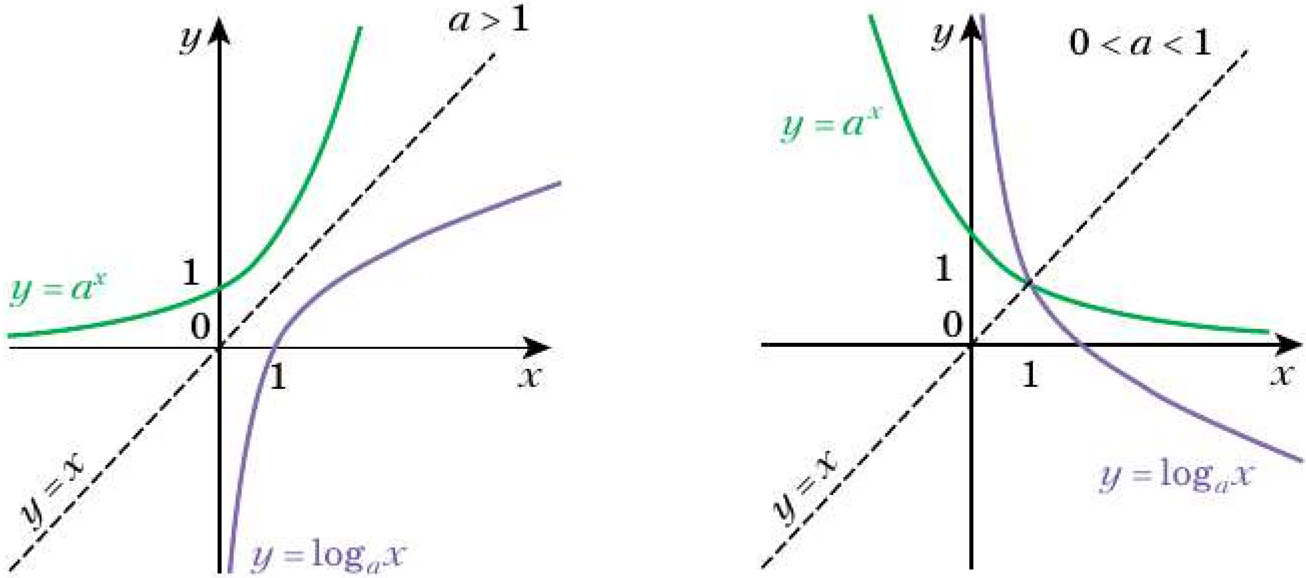


Рис. 5.1

➪ Поэтому *функция* $y = \log_a x$ *является возрастающей при* $a > 1$ *и убывающей при* $0 < a < 1$.

➪ Так как логарифмическая функция является либо возрастающей (при $a > 1$), либо убывающей (при $0 < a < 1$), то она *не имеет точек экстремума*.

Графики взаимно обратных функций являются равными фигурами. Поэтому если определённая на некотором промежутке функция является обратимой и непрерывной, то обратная к ней функция также непрерывна. Показательная функция $y = a^x$ непрерывна.

➪ Поэтому *функция* $y = \log_a x$ *является непрерывной*.

Опираясь на равенство графиков функций $y = a^x$ и $y = \log_a x$, можно также установить следующее.

➪ *Логарифмическая функция дифференцируема*. Подробнее о производной логарифмической функции вы узнаете в § 8.

➪ *График функции* $y = \log_a x$ *имеет вертикальную асимптоту* $x = 0$, *когда* x *стремится к нулю справа*.

В таблице приведены свойства функции $y = \log_a x$, изученные в этом параграфе.

Область определения	$(0; +\infty)$
Область значений	$\boldsymbol{R}$
Нули функции	$x = 1$

Промежутки знакопостоянства	Если $a > 1$, то $y < 0$ на $(0; 1)$, $y > 0$ на $(1; +\infty)$; если $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1; +\infty)$, $y > 0$ на $(0; 1)$
Возрастание/ убывание	Если $a > 1$, то функция возрастающая; если $0 < a < 1$, то функция убывающая
Непрерывность	Непрерывная
Дифференцируемость	Дифференцируемая
Асимптоты	Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота, когда x стремится к нулю справа

Пример 1. Сравните с единицей основание a логарифма, если известно, что $\log_a 5 < \log_a 4$.

Решение. Предположим, что $a > 1$, тогда функция $y = \log_a x$ является возрастающей. Поэтому $\log_a 5 > \log_a 4$. Но по условию это не так. Значит, $a < 1$. ■

Пример 2. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$;

2) $f(x) = \dfrac{\lg(9 - x^2)}{\lg(x + 2)}$;

3) $f(x) = \log_{x-4}(16 - x)$.

Решение. 1) Поскольку область определения логарифмической функции — множество положительных чисел, то областью определения данной функции является множество решений неравенства $x^2 + 3x > 0$.

Имеем: $x(x + 3) > 0$. Отсюда $x < -3$ или $x > 0$.

Следовательно, $D(f) = (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$.

2) Выражение $\lg(9 - x^2)$ имеет смысл при $9 - x^2 > 0$, выражение $\lg(x + 2)$ — при $x + 2 > 0$. Кроме того, знаменатель дроби не может быть равным нулю, поэтому $\lg(x + 2) \neq 0$. Таким образом, область определения $D(f)$ данной функции — это множество решений системы неравенств:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 2 > 0, \\ x + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} x^2 < 9, \\ x > -2, \\ x \neq -1; \end{cases}$ $\begin{cases} -3 < x < 3, \\ x > -2, \\ x \neq -1. \end{cases}$ Обратившись к рисунку 5.2, приходим к выводу, что последняя система равносильна совокупности $\left[\begin{array}{l} -2 < x < -1, \\ -1 < x < 3. \end{array}\right.$

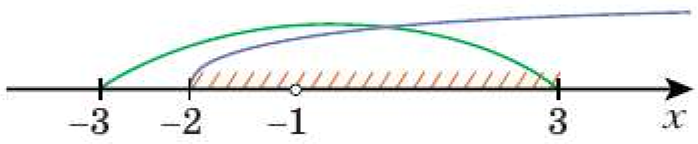


Рис. 5.2

Следовательно, $D(f) = (-2; -1) \cup (-1; 3)$.

3) Область определения данной функции найдём, решив систему неравенств $\begin{cases} 16 - x > 0, \\ x - 4 > 0, \\ x - 4 \neq 1. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x < 16, \\ x > 4, \\ x \neq 5; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} 4 < x < 5, \\ 5 < x < 16. \end{array}\right.$

Отсюда $D(f) = (4; 5) \cup (5; 16)$. ■

Пример 3. Сравните: 1) $\log_2 6$ и $\log_2 7$; 2) $\log_{0,2} 6$ и $\log_{0,2} 7$; 3) $\log_6 7$ и $\log_7 6$; 4) $\log_{\frac{\pi}{4}} 4$ и 0; 5) $\log_{\frac{1}{6}} 38$ и -2.

Решение. 1) Так как логарифмическая функция $y = \log_2 x$ возрастающая, то $\log_2 6 < \log_2 7$.

2) Так как логарифмическая функция $y = \log_{0,2} x$ убывающая, то $\log_{0,2} 6 > \log_{0,2} 7$.

3) Имеем: $\log_6 7 > \log_6 6$, то есть $\log_6 7 > 1$. Вместе с тем $\log_7 7 > \log_7 6$, то есть $1 > \log_7 6$. Следовательно, $\log_6 7 > 1 > \log_7 6$.

4) Учитывая, что $0 < \frac{\pi}{4} < 1$, имеем: $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < \log_{\frac{\pi}{4}} 1$. Следовательно, $\log_{\frac{\pi}{4}} 4 < 0$.

5) Имеем: $-2 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{6}} 36$. Так как $\log_{\frac{1}{6}} 38 < \log_{\frac{1}{6}} 36$, то $\log_{\frac{1}{6}} 38 < -2$. ■

Пример 4. Сравните $\log_2 3$ и $\log_3 5$.

Решение. Докажем, что $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Поскольку $\frac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8}$ и $3 > \sqrt{8}$, то $\log_2 3 > \frac{3}{2}$. Аналогично доказываем, что $\log_3 5 < \frac{3}{2}$. Следовательно, $\log_2 3 > \log_3 5$. ■

1. Какую функцию называют логарифмической?
2. Перечислите свойства логарифмической функции.

Упражнения

5.1. Возрастающей или убывающей является функция:
1) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$;
2) $y = \log_3 x$;
3) $y = \log_{0,1} x$;
4) $y = \lg x$;
5) $y = \log_{\sqrt{5}} x$;
6) $y = \log_{\frac{\pi}{3}} x$;
7) $y = \log_{\sqrt{2}-1} x$;
8) $y = \log_{\frac{\pi}{6}} x$?

5.2. На основании какого свойства логарифмической функции можно утверждать, что:
1) $\lg 7 > \lg 5$;
2) $\log_{0,6} 4 < \log_{0,6} 3$?

5.3. Сравните:
1) $\log_{12} 5$ и $\log_{12} 6$;
2) $\log_5 \frac{1}{2}$ и $\log_5 \frac{1}{3}$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 2$ и $\log_{\frac{1}{3}} 4$;
4) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{4}{5}$ и $\log_{\frac{1}{9}} \frac{5}{6}$;
5) $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,7$ и $\log_{\frac{\pi}{2}} 0,6$;
6) $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,4$ и $\log_{\frac{2\pi}{5}} 8,3$.

5.4. Сравните:
1) $\log_{0,9} \sqrt{3}$ и $\log_{0,9} \sqrt{2}$;
2) $\log_7 \frac{2}{3}$ и $\log_7 \frac{1}{2}$;
3) $\log_{\frac{2}{3}} 6,8$ и $\log_{\frac{2}{3}} 6,9$;
4) $\lg \frac{\pi}{3}$ и $\lg \frac{\pi}{4}$.

5.5. Сравните с единицей основание логарифма, если:
1) $\log_a 0,5 > \log_a 0,4$;
2) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a 1$;
3) $\log_a \sqrt{5} < \log_a \sqrt{6}$;
4) $\log_a \frac{\pi}{4} < \log_a \frac{\pi}{3}$.

5.6. Сравните с единицей основание логарифма, если:
1) $\log_a \frac{2}{3} > \log_a \frac{1}{2}$;
2) $\log_a 2 < \log_a \sqrt{3}$.

5.7. Положительным или отрицательным числом является:

1) $\log_{0,5}0,6$; 2) $\log_{0,3}3$; 3) $\log_2 0,27$; 4) $\log_\pi 3$?

5.8. Сравните с нулём:

1) $\log_4 5$; 2) $\log_2 \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$; 4) $\log_{\frac{\pi}{3}} 2$.

5.9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:

1) $y = \log_2 x$, $\left[\frac{1}{4}; 8\right]$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $\left[\frac{1}{16}; 8\right]$;

3) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$, $\left[\frac{4}{9}; \frac{81}{16}\right]$.

5.10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $\left[\frac{1}{9}; 3\right]$; 2) $y = \lg x$, $[1; 1000]$.

5.11. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \log_2 x$ равно 3, а наименьшее равно -1?

5.12. На каком промежутке наибольшее значение функции $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ равно -1, а наименьшее равно -2?

5.13. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_3(x + 1)$;

2) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1)$;

3) $f(x) = \log_4(-x)$;

4) $f(x) = \lg x^2$;

5) $f(x) = \log_5(x^2 + x + 1)$;

6) $f(x) = \log_{0,6}(5x - 6 - x^2)$;

7) $f(x) = 2\lg x + 3\lg(2 - x)$;

8) $f(x) = \log_2 \frac{2x - 3}{x + 7}$.

5.14. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \log_7(6 - x)$;

2) $f(x) = \log_{12}|x|$;

3) $f(x) = \lg(x^2 - 1)$;

4) $f(x) = \log_{0,4}(7x - x^2)$;

5) $f(x) = \lg(x + 2) - 2\lg(x + 5)$;

6) $f(x) = \lg \frac{2x + 1}{x - 1}$.

5.15. Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = \log_2 x$ и $y = \log_2 \frac{1}{x}$. Каково взаимное расположение построенных графиков?

5.16. Постройте на одной координатной плоскости графики функций $y = \log_3 x$ и $y = \log_{\frac{1}{3}} x$. Каково взаимное расположение построенных графиков?

5.17. Сравните:

1) $\log_9 2$ и 3;
2) $\log_{\frac{1}{5}} 27$ и -2;
3) $\log_{\sqrt{3}} 26$ и 6;
4) $\log_{16} 0{,}1$ и $-\frac{3}{4}$.

5.18. Сравните:

1) $\log_{0,1} 12$ и 1;
2) $\log_4 3$ и $-\frac{1}{2}$;
3) $\frac{2}{3}$ и $\log_{125} 30$.

5.19. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число:

1) $\log_3 10$;
2) $\log_2 5$;
3) $\log_{\frac{1}{3}} 7$;
4) $\log_{0,1} 2$?

5.20. Между какими двумя последовательными целыми числами находится на координатной прямой число: 1) $\log_2 29$; 2) $\log_{\frac{1}{2}} 9$?

5.21. Сравните:

1) $\log_4 5$ и $\log_5 4$;
2) $\log_{1,5} 1{,}3$ и $\log_{1,3} 1{,}5$;
3) $\log_{0,7} 0{,}8$ и $\log_{0,8} 0{,}7$;
4) $\log_{0,2} 0{,}1$ и $\log_{0,1} 0{,}2$.

5.22. Сравните:

1) $\log_{1,7} 1{,}8$ и $\log_{1,8} 1{,}7$;
2) $\log_{0,2} 0{,}3$ и $\log_{0,3} 0{,}2$.

5.23. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \dfrac{1}{\lg x}$;
2) $f(x) = \dfrac{4}{\log_5 (10 - x)}$;
3) $f(x) = \log_2 \cos x$;
4) $f(x) = \log_3 \operatorname{tg} x$.

5.24. Найдите область определения функции:

1) $y = \dfrac{5}{\lg (x + 3)}$;
2) $y = \lg \sin x$.

5.25. Постройте график функции:

1) $y = \log_2 (x - 1)$;
2) $y = \log_2 (x + 3)$;
3) $y = \log_2 x - 1$;
4) $y = \log_2 x + 3$;
5) $y = -\log_2 x$;
6) $y = \log_2 (-x)$.

5.26. Постройте график функции:

1) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x - 2)$;
2) $y = \log_{\frac{1}{3}} (x + 1)$;
3) $y = \log_{\frac{1}{3}} x - 2$;
4) $y = \log_{\frac{1}{3}} x + 1$;
5) $y = -\log_{\frac{1}{3}} x$;
6) $y = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$.

5.27. Решите графически уравнение:

1) $\log_2 x = 3 - x$;
2) $\log_{\frac{1}{3}} x = x - 1$;
3) $\log_2 x = -x - 0{,}5$.

5.28. Решите графически уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{2}} x = x + \frac{1}{2}$;
2) $\log_3 x = 4 - x$.

5.29. Определите графически количество корней уравнения:

1) $\log_2 x = -x$; 2) $\log_3 x = -x^2$; 3) $\log_{\frac{1}{2}} x = \sqrt{x}$.

5.30. Сколько корней имеет уравнение:

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \log_2 x$; 2) $\log_2 x = \frac{1}{x}$?

5.31. Сравните $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2.

5.32. Докажите, что $\log_{\frac{1}{3}} 4 + \log_4 \frac{1}{3} < -2$.

5.33. Найдите область определения функции:

1) $y = \lg(1 - \sin x)$;

2) $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(1 + x^2)}$;

3) $y = \sqrt{\lg \cos x}$;

4) $y = \frac{1}{\log_6(x - 3)} + \sqrt{6 - x}$;

5) $y = \sqrt{\frac{(x + 1)(3 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$;

6) $y = \log_5(x^2 - 4x + 3) + \frac{1}{\log_5(7 - x)}$;

7) $y = \lg(6x - x^2) + \frac{1}{\lg(3 - x)}$;

8) $y = \log_{x+3}(x^2 + x)$.

5.34. Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{\lg(x^2 + 1)}$;

2) $y = \lg(1 + \sin x)$;

3) $y = \sqrt{\lg(1 + x^2)}$;

4) $y = \sqrt{\lg \sin x}$;

5) $y = \lg(x + 8) - \frac{5}{\lg(-x - 1)}$;

6) $y = \lg(10x - x^2) - \frac{1}{\lg(8 - x)}$;

7) $y = \frac{x}{\lg(4 - x^2)}$;

8) $y = \lg(9x - x^2) - \frac{1}{\lg(5 - x)}$;

9) $y = \log_{2-x}(8 + 7x - x^2)$;

10) $y = \sqrt{\frac{(x + 5)(2 - x)}{\lg(x^2 + 1)}}$.

5.35. Постройте график функции:

1) $y = \left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$; 3) $y = \frac{\left|\log_{0,2} x\right|}{\log_{0,2} x}$;

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$; 4) $y = \sqrt{\log_3^2 x} \log_x 3$.

5.36. Постройте график функции:

1) $y = |\log_3 x|$; 2) $y = \log_3 |x|$; 3) $y = \frac{\log_2 x}{\sqrt{\log_2^2 x}}$.

5.37. Найдите наибольшее значение функции:

1) $y = \log_{0,1}(x^2 + 100)$; 2) $y = \log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 14)$.

5.38. Найдите наименьшее значение функции:

1) $y = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 + 8}$; 2) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{x^2 - 4x + 7}$.

5.39. Исследуйте на чётность функцию $y = \lg(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

5.40. Исследуйте на чётность функцию $y = \lg(\sqrt{x^2 + 1} + x)$.

5.41. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $f(x) = 9\log_2^2 x - 30\log_2 x + 61 - 9a^2$ на отрезке [1; 4] является положительным числом?

5.42. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $f(x) = -4\log_3^2 x + 20\log_3 x - 9a^2$ на отрезке [3; 27] является отрицательным числом?

5.43. Сравните числа $\log_2 3$ и $\log_3 7$.

§ 6 Логарифмические уравнения

Уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называют **простейшим логарифмическим уравнением.**

Поскольку графики функций $y = \log_a x$ и $y = b$ пересекаются в одной точке (рис. 6.1), то простейшее логарифмическое уравнение имеет единственный корень при любом b. Этот корень можно найти, используя определение логарифма. Имеем: $x = a^b$.

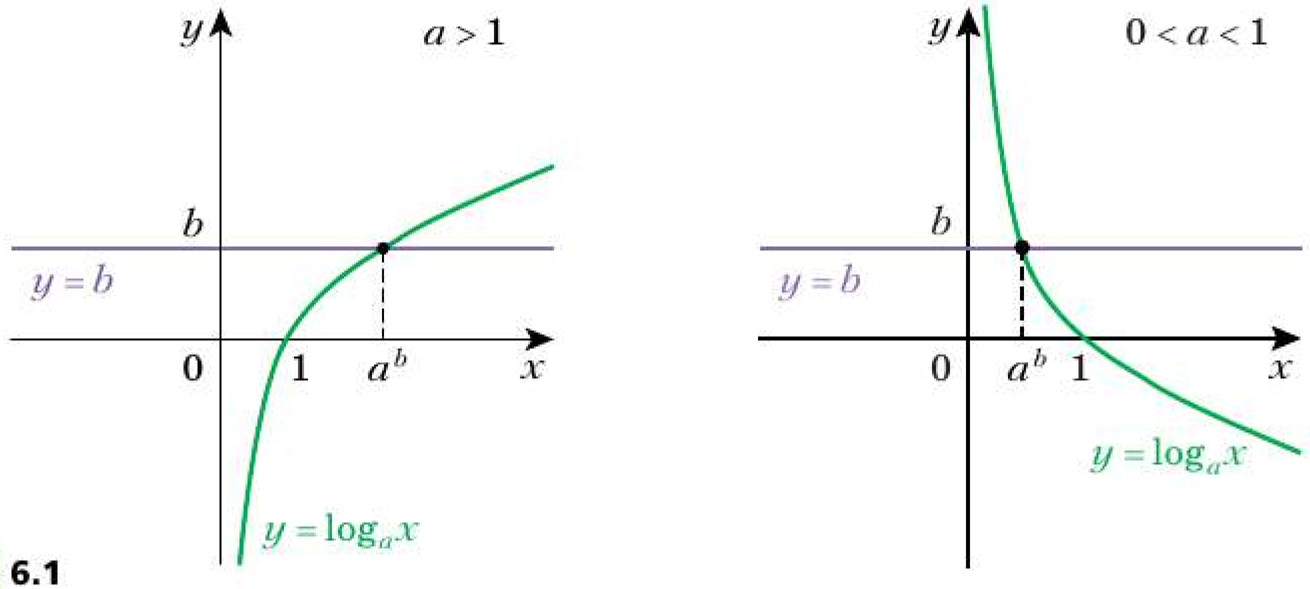


Рис. 6.1

Пример 1. Решите уравнение $\log_3(3x-1)=2$.

Решение. По определению логарифма можно записать: $3x-1=3^2$. Отсюда $3x-1=9$; $x=\frac{10}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}$. ■

Решённое уравнение — частный случай уравнения вида $\log_a f(x)=b$, где $a>0$, $a\neq 1$. Рассуждая, как в примере 1, можно показать, что это уравнение равносильно уравнению $f(x)=a^b$.

При решении многих логарифмических уравнений применяют следующую теорему.

Теорема 6.1

Пусть $a>0$, $a\neq 1$. Если $\log_a x_1=\log_a x_2$, то $x_1=x_2$, и наоборот, если $x_1>0$, $x_2>0$ и $x_1=x_2$, то $\log_a x_1=\log_a x_2$.

Поскольку логарифмическая функция является возрастающей или убывающей, то для доказательства этой теоремы можно воспользоваться идеей доказательства теоремы 2.1. Убедитесь в этом самостоятельно.

Следствие

Пусть $a>0$, $a\neq 1$. Уравнение вида $\log_a f(x)=\log_a g(x)$ равносильно любой из систем

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)>0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0. \end{cases}$$

Выбор соответствующей системы, как правило, связан с тем, какое из неравенств, $f(x)>0$ или $g(x)>0$, решить легче.

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите следствие из теоремы 6.1 самостоятельно.

Теперь решение уравнения примера 1 можно оформить так:

$$\log_3(3x-1)=2\log_3 3;$$

$$\log_3(3x-1)=\log_3 3^2;$$

$$3x-1=3^2;\ \ x=\frac{10}{3}.$$

Пример 2. Решите уравнение $\lg(x^2 - 4x + 2) = \lg(2x - 3)$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 2x - 3, \\ 2x - 3 > 0. \end{cases}$$

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 6x + 5 = 0, \\ x > \frac{3}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5, \end{array}\right. \\ x > \frac{3}{2}. \end{cases}$ Отсюда $x = 5$.

Ответ: 5. ■

Пример 3. Решите уравнение $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$.

Решение. Естественно преобразовать это уравнение так:

$$\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3.$$

Отсюда $(2x - 1)(x - 2) = 3^3$; $2x^2 - 5x - 25 = 0$; $x = 5$ или $x = -\frac{5}{2}$.

Легко убедиться, что число $-\frac{5}{2}$ не является корнем данного уравнения (это число не входит в его область определения), а число 5 является корнем данного уравнения.

Таким образом, данное уравнение решено методом следствий.

Ответ: 5. ■

Обратим внимание, что переход от уравнения $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2) = 3$ к уравнению $\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3$ не является равносильным и приводит к появлению постороннего корня.

Выясним причину возникновения постороннего корня.

Область определения исходного уравнения задаётся системой неравенств $\begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \end{cases}$ множеством решений которой является промежуток $(2; +\infty)$. Заменив выражение $\log_3(2x - 1) + \log_3(x - 2)$ на выражение $\log_3((2x - 1)(x - 2))$, мы расширили область определения исходного уравнения. Действительно, область определения уравнения $\log_3((2x - 1)(x - 2)) = 3$ задаётся неравенством $(2x - 1)(x - 2) > 0$, множеством решений которого является объединение промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$.

Следовательно, расширение области определения уравнения от множества $(2; +\infty)$ до множества $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (2; +\infty)$ и стало причиной появления постороннего корня $-\frac{5}{2}$.

Решение уравнения из примера 3 можно оформить следующим образом.

Уравнение $\log_3(2x-1)+\log_3(x-2)=3$ равносильно системе

$$\begin{cases}\log_3((2x-1)(x-2))=3,\\ 2x-1>0,\\ x-2>0.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}(2x-1)(x-2)=3^3,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}2x^2-5x-25=0,\\ x>2;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=5,\\ x=-\dfrac{5}{2},\end{array}\right.\\ x>2.\end{cases}$

Получаем: $x=5$.

Пример 4. Решите уравнение $x^{\frac{\lg x+2}{3}}=10^{2+\lg x}$.

Решение. Так как на области определения уравнения, то есть на множестве $(0;+\infty)$, обе его части принимают положительные значения, то можем записать уравнение, равносильное данному:

$$\lg x^{\frac{\lg x+2}{3}}=\lg 10^{2+\lg x}.$$

Отсюда $\dfrac{\lg x+2}{3}\cdot\lg x=2+\lg x$.

Пусть $\lg x=t$. Тогда $\dfrac{(t+2)t}{3}=2+t$. Получаем: $\left[\begin{array}{l}t=-2,\\ t=3.\end{array}\right.$ Поэтому исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\lg x=-2,\\ \lg x=3.\end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l}x=10^{-2},\\ x=10^3;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=0{,}01,\\ x=1000.\end{array}\right.$

Ответ: 0,01; 1000. ■

Пример 5. Решите уравнение $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$. (1)

Решение. Отметим, что переход от уравнения (1) к уравнению

$$2\log_3(x-2)+2\log_3(x-4)=0 \qquad (2)$$

может привести к потере решений.

Действительно, областью определения исходного уравнения является множество $(2;4)\cup(4;+\infty)$, а область определения уравнения (2) — множество $(4;+\infty)$. Следовательно, такой переход сужает область определения исходного уравнения на множество $(2;4)$, которое может содержать корни уравнения (1).

На самом деле уравнение (1) равносильно такому уравнению:

$$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0.$$

Отсюда $\log_3(x-2)+\log_3|x-4|=0$.

Это уравнение равносильно совокупности двух систем:

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(4-x)=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3(x-2)+\log_3(x-4)=0.\end{cases}\end{array}\right.$ Далее имеем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ \log_3((x-2)(4-x))=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \log_3((x-2)(x-4))=0;\end{cases}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ (x-2)(4-x)=1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ (x-2)(x-4)=1;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x^2-6x+9=0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ x^2-6x+7=0;\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2<x<4,\\ x=3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\ \left[\begin{array}{l}x=3-\sqrt{2},\\ x=3+\sqrt{2};\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=3+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Ответ: $3;\ 3+\sqrt{2}$. ■

Пример 6. Решите уравнение $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.

Решение. Перейдём к логарифмам по основанию 2:

$$\frac{\log_2 16}{\log_2 x^2}+\frac{\log_2 64}{\log_2 2x}=3.$$

Поскольку из условия следует, что $x>0$, то $\log_2 x^2=2\log_2 x$. Далее имеем:

$$\frac{4}{2\log_2 x}+\frac{6}{\log_2 2+\log_2 x}=3.$$

Пусть $\log_2 x=t$, тогда получим: $\dfrac{2}{t}+\dfrac{6}{1+t}=3$.

Отсюда $t=-\dfrac{1}{3}$ или $t=2$. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-\dfrac{1}{3},\\ \log_2 x=2;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=2^{-\frac{1}{3}},\\ x=2^2.\end{array}\right.$$

Ответ: $2^{-\frac{1}{3}};\ 4$. ■

Пример 7. Решите уравнение $\log_7(x+8)=-x$.

Решение. Рассмотрим функции $f(x)=\log_7(x+8)$ и $g(x)=-x$. Функция f является возрастающей, функция g — убывающей. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня. Так как $f(-1) = g(-1)$, то $x = -1$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: -1. ■

Пример 8. Решите уравнение $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}\log_3(x-2) = 0$.

Решение. Ошибочно считать, что уравнение вида $f(x) \cdot g(x) = 0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{array}\right.$ При таком переходе существует опасность получить в ответе посторонние корни. Например, нет гарантии, что все корни уравнения $f(x) = 0$ принадлежат области определения функции g.

На самом деле уравнение $f(x) \cdot g(x) = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0, \end{array}\right. \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$$

Воспользовавшись этим, запишем систему, равносильную уравнению $\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}}\log_3(x-2) = 0$:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \log_3(x-2) = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ x > 2, \\ \sin x \geqslant \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Единственным корнем первого уравнения совокупности является число 3. Так как $\sin 3 < \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (рис. 6.2), то $x = 3$ не является корнем исходного уравнения.

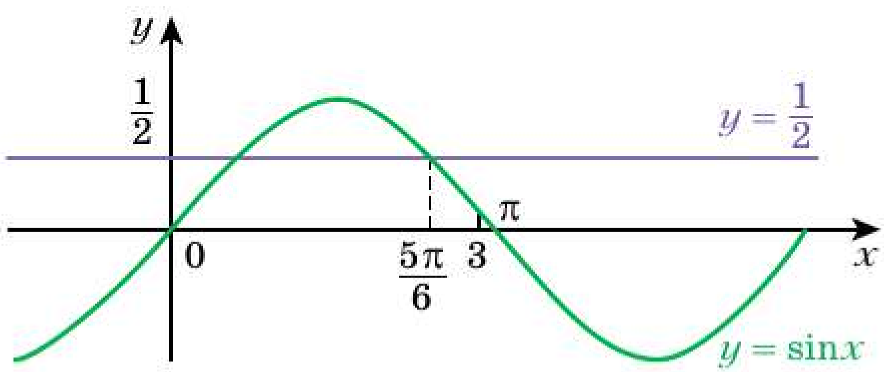


Рис. 6.2

Все числа вида $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, являются корнями второго уравнения совокупности. Среди них следует выбрать только те, которые удовлетворяют условию $x > 2$. Для этого достаточно потребовать, чтобы $n \in \boldsymbol{N}$.

Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$. ■

Пример 9. Решите уравнение $(1 - 4x^2 + 4x) \log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 2$.

Решение. Имеем: $(2 - (2x - 1)^2) \log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 2$.

Очевидно, что $2 - (2x - 1)^2 \leqslant 2$, $0 < \log_3(\sin^2 \pi x + 2) \leqslant 1$. Поэтому $(2 - (2x - 1)^2) \log_3(\sin^2 \pi x + 2) \leqslant 2$.

В этом неравенстве равенство достигается только при условии $\begin{cases} 2 - (2x-1)^2 = 2, \\ \log_3(\sin^2 \pi x + 2) = 1. \end{cases}$ Отсюда $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. ■

1. Опишите, какое уравнение называют логарифмическим.
2. Сформулируйте теоремы, которые используют при решении логарифмических уравнений.

Упражнения

6.1. Решите уравнение:

1) $\log_2(x - 1) = 1$;
2) $\log_3(2x + 1) = 3$;
3) $\lg(3 - 2x) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{6}}(4x - 8) = -2$;
5) $\log_7(x^2 - 2x - 8) = 1$;
6) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x - 5) = -4$.

6.2. Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{5}}(x + 7) = -3$;
2) $\log_4(2x - 5) = 0{,}5$;
3) $\log_{\sqrt{3}}(x^2 - 5x - 3) = 2$;
4) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) = -1$.

6.3. Решите уравнение:

1) $\log_\pi(x + 1) = \log_\pi(4x - 5)$;
2) $\log_5(3x - 5) = \log_5(x - 3)$;
3) $\lg(x^2 + 2) = \lg(3x + 6)$.

6.4. Решите уравнение:

1) $\log_9(4x - 6) = \log_9(x - 2)$;
2) $\log_{\frac{1}{4}}(x + 7) = \log_{\frac{1}{4}}(x^2 + 5)$.

6.5. Решите уравнение:

1) $\log_2 \sqrt{x} - \log_2 \frac{1}{x} = 6$;

2) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$;

3) $\log_6 x + 2\log_{36} x + 3\log_{216} x = 3$;

4) $\log_7 \log_4 (x - 2) = 0$;

5) $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$.

6.6. Решите уравнение:

1) $\log_3 \frac{1}{x} + \log_3 \sqrt[3]{x} = \frac{4}{3}$;

2) $\log_5 x - \log_{25} x + \log_{625} x = \frac{3}{4}$;

3) $\lg \lg \lg x = 0$.

6.7. Решите уравнение:

1) $\log_2(3^{5x-3} + 1) = 2$;

2) $\log_3(3^{x-1} + 6) = x$;

3) $\log_2(2^x + 7) = 3 - x$;

4) $\log_6(6^{-x} - 5) = x + 1$.

6.8. Решите уравнение:

1) $\log_6(6^{x+1} - 30) = x$;

2) $\log_5(6 - 5^x) = 1 - x$.

6.9. Решите уравнение:

1) $\lg(x^2 - 2x) = \lg(2x + 12)$;

2) $\log_4(x - 1) = \log_4(x^2 - x - 16)$;

3) $\log_{0,5}(x^2 + 3x - 10) = \log_{0,5}(x - 2)$;

4) $\log_6(x^2 - x - 2) = \log_6(2 - x)$;

5) $2\log_{0,4} x = \log_{0,4}(2x^2 - x)$;

6) $2\log_7(-x) = \log_7(x + 2)$;

7) $2\log_8(1 - x) = \log_8(2,5x + 1)$;

8) $2\log_3 x = 1 + \log_3(x + 6)$.

6.10. Решите уравнение:

1) $\log_6(9 - x^2) = \log_6(1 - 2x)$;

2) $\lg(x^2 + 2x - 3) = \lg(2x^2 - 2)$;

3) $\log_{0,7}(2x^2 - 9x + 4) = 2\log_{0,7}(x + 2)$;

4) $2\log_2(-x) - \log_2(3x + 8) = 1$.

6.11. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\log_6(5x + 1) = \log_6(x - 1)$;

2) $\log_5(25^x - 2 \cdot 5^x) = 2\log_{25} 15$;

3) $\log_{\sqrt{5}}(16^x - 6) = 2 + \log_{\sqrt{5}}(4^x - 2)$;

4) $x\lg 3 - 1 = 2\lg 3 - \lg(3^x + 1)$.

6.12. Решите уравнение:

1) $\frac{1}{2}\log_{0,1}(2x+3)-\log_{0,1}(2x-3)=0$;

2) $\log_3(2^{2x}+2^x)=2\log_9 12$;

3) $x-\lg 5=x\lg 5+2\lg 2-\lg(1+2^x)$.

6.13. Решите уравнение:

1) $\log_4(x-3)+\log_4 x=1$;

2) $\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(x-1)=-1$;

3) $\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$;

4) $\log_3(2x-1)+\log_3(x-4)=2$;

5) $\lg\sqrt{5x-4}+\lg\sqrt{x+1}=2+\lg 0,18$;

6) $\lg(x-1)+\lg(x-3)=\lg(1,5x-3)$;

7) $\log_2(5-x)-\log_2(x-1)=1-\log_2(x+2)$;

8) $2\log_5(x+1)-\log_5(x+9)=\log_5(3x-17)$.

6.14. Решите уравнение:

1) $\log_7 x+\log_7(x+6)=1$;

2) $\log_3(5-x)+\log_3(3-x)=1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}}(4x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=\log_{0,5}3,5$;

4) $\log_{0,6}(x+2)+\log_{0,6}(6-x)=\log_{0,6}(x+8)$;

5) $\log_2(2x-1)-\log_2(x+2)=2-\log_2(x+1)$;

6) $2\lg(x+1)-\lg(4x-5)=\lg(x-5)$.

6.15. Решите уравнение:

1) $\log_3(5^x+2)+\log_3(5^x-1)=2+\log_3 2$;

2) $\log_2(2^x+3)+\log_2(5-2^x)=4$.

6.16. Решите уравнение:

1) $\log_{\sqrt{3}}(2^x-3)+\log_{\sqrt{3}}(2^x-1)=2$;

2) $\lg(3^x-4)+\lg(3^x-2)=1$.

6.17. Решите уравнение:

1) $\log_2^2 x+3\log_2 x-4=0$;

2) $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$;

3) $\lg^2 x-2\lg x^2+3=0$;

4) $\log_5 x+\log_x 5=2,5$;

5) $2\log_{\frac{1}{6}} x+3\sqrt{\log_{\frac{1}{6}} x}-5=0$;

6) $\dfrac{2}{\lg(x+2)-3}+\dfrac{4}{\lg(x+2)+1}=1$.

6.18. Решите уравнение:

1) $3\log_8^2(-x)-2\log_8(-x)-1=0$;

2) $2\log_7\sqrt{x}=\log_7^2 x-6$;

3) $3\log_3 x+3\log_x 3=10$;

4) $\dfrac{\lg x}{\lg x+2}-\dfrac{2}{\lg x-1}=1$.

6.19. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\lg x}{\lg(8x-7)} = 1$;

2) $\dfrac{\log_4(x^2+x-2)-1}{\log_4(x-1)} = 0$;

3) $\log_x(2x^2-7x+12) = 2$;

4) $\log_{x+1}(x+3) = 2$;

5) $\log_{x-2}(2x^2-11x+16) = 2$.

6.20. Решите уравнение:

1) $\dfrac{2\log_2 x}{\log_2(3-2x)} = 1$;

2) $\dfrac{\log_5(x^2-9x+25)-1}{\lg(x-3)} = 0$;

3) $\log_{x-1}(x^2-5x+7) = 1$;

4) $\log_x(x+6) = 2$;

5) $\log_{2x-3}(3x^2-7x+3) = 2$.

◆ ◆ ◆

6.21. Решите уравнение:

1) $\log_2(x-5)^2 - 2\log_2(x+2) = 2$;

2) $\dfrac{1}{2}\lg x^2 + \lg(x+7) = 1$.

6.22. Решите уравнение:

1) $\dfrac{1}{4}\log_2 x^4 + \log_2(x+10) = 3 + \log_2 3$;

2) $\dfrac{1}{2}\log_6 x^2 + \log_6(5-x) = 1$.

6.23. Решите уравнение:

1) $\log_3^2 x^3 + 4\log_3 x - 5 = 0$;

2) $\lg(10x^2)\cdot\lg x = 1$;

3) $\log_4 x^2 \cdot \log_4 \dfrac{16}{x} = 2$;

4) $\log_2(4x)\cdot\log_2(0{,}25x) = 5$;

5) $\lg^2(100x) + 2\lg x = 20$;

6) $\log_5^2(5x) + \log_5 \dfrac{x}{25} = 3$;

7) $\lg(\lg x) + \lg(\lg x^2 - 1) = 0$;

8) $2\lg(\lg x) = \lg(2\lg x + 8)$.

6.24. Решите уравнение:

1) $3\lg^2 x^2 - \lg x - 1 = 0$;

2) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \dfrac{x}{27} + 4 = 0$;

3) $\log_7(7x)\cdot\log_7 \dfrac{x}{7} = \log_7 x^2 - 1$;

4) $\lg^2(10x) + \lg(10x) = 6 + 3\lg x$;

5) $\log_6^2(36x) + \log_6 \dfrac{x^2}{216} = 8$;

6) $\log_5(\log_2 x) + \log_5(\log_2 x^3 - 14) = 1$.

6.25. Решите уравнение:

1) $x^{\log_5 x} = 5$;
2) $x^{\lg x + 2} = 1000$;
3) $x^{\log_3 x - 3} = \frac{1}{9}$;
4) $x^{\log_6 x} = 216x^2$.

6.26. Решите уравнение:

1) $x^{\log_3 x} = 81$;
2) $x^{\lg x} = 100x$;
3) $x^{\log_2 x - 2} = 256$;
4) $(\sqrt[3]{x})^{\lg x} = 10^{6 + \lg x}$.

6.27. Решите уравнение:

1) $\log_x 4 + \log_{x^2} 64 = 5$;
2) $3\log_x 16 - 4\log_{16} x = 2\log_2 x$;
3) $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$;
4) $3\log_{3x} x = 2\log_{9x} x^2$;
5) $2\log_{4x} x^3 = 5\log_{2x} x$;
6) $\log_{4x} 2 + \log_2 x = 0$.

6.28. Решите уравнение:

1) $\log_x (9x^2)\log_3^2 x = 4$;
2) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;
3) $\dfrac{2 - 4\log_{12} 2}{\log_{12}(x + 2)} - 1 = \dfrac{\log_6 (8 - x)}{\log_6 (x + 2)}$;
4) $\log_{x+1}(x^3 - 9x + 8)\log_{x-1}(x + 1) = 3$.

6.29. Решите уравнение:

1) $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$;
2) $\log_x (125x)\log_{25}^2 x = 1$;
3) $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$.

6.30. Докажите, что при $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$ выполняется равенство $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

6.31. Решите уравнение:

1) $x^{\lg 5} + 5^{\lg x} = 250$;
2) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 18$.

6.32. Решите уравнение:

1) $x^{\log_2 10} + 10^{\log_2 x} = 200$;
2) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

6.33. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 9^x - 4 \cdot 3^{5-y} + 27 = 0, \\ \lg(2y - 3x) = \lg(4 - 4x + y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_3 x} = 18, \\ \log_3 x + \log_3 y = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \log_y x + \log_x y = \frac{5}{2}, \\ xy = 27; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \log_3 (x + 2y) + \log_{\frac{1}{3}} (x - 2y) = 1, \\ x^2 + y^2 = 4 + \frac{1}{2}y; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20. \end{cases}$

6.34. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \lg(3x - 2y) = \lg(5 + x - 3y); \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 16, \\ \log_2 x - \log_2 y = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 - \log_2 y = 2\log_2(x + y), \\ \log_2(x + y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x + y)3^{y-x} = \dfrac{5}{27}, \\ 3\log_5(x + y) = x - y. \end{cases}$

6.35. Решите уравнение:

1) $\log_7(x + 8) = -x;$ 2) $\log_2^2 x + (x - 1)\log_2 x = 6 - 2x.$

6.36. Решите уравнение:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x - 5) = x - 9;$ 2) $\log_3^2 x + (x - 1)\log_3 x = 12 - 3x.$

6.37. Решите уравнение $\lg^2(x + 1) = \lg(x + 1)\lg(x - 1) + 2\lg^2(x - 1).$

6.38. Решите уравнение $2\lg^2(2x - 1) = \lg^2(2x + 1) - \lg(2x - 1) \cdot \lg(2x + 1).$

6.39. Решите уравнение:

1) $x^2 \log_x 27 \cdot \log_9 x = x + 4;$

2) $\lg\sqrt{1 + x} + 3\lg\sqrt{1 - x} - 2 = \lg\sqrt{1 - x^2}.$

6.40. Решите уравнение:

1) $x\log_{x+1}5 \cdot \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{5}}}(x + 1) = \dfrac{x - 4}{x};$

2) $\log_{1+x+\sin x}(x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x}(3x + 2).$

6.41. Решите уравнение $\sqrt{\operatorname{tg} x + 1} \cdot \log_{\frac{1}{2}}(3 - x) = 0.$

6.42. Сколько решений имеет уравнение $(\log_2(x + 1) - 3)\sqrt{x - a} = 0$ в зависимости от значения параметра a?

6.43. Сколько решений имеет уравнение $(\log_3(x - 2) - 2)\sqrt{x - a} = 0$ в зависимости от значения параметра a?

6.44. При каких значениях параметра a уравнение $(x - a)\log_2(3x - 7) = 0$ имеет единственный корень?

6.45. При каких значениях параметра a уравнение $(x + a)\log_3(2x - 5) = 0$ имеет единственный корень?

6.46. Решите уравнение:

1) $\log_x \cos(2\pi x) = 0$; 2) $\log_{\sqrt{2}\sin x}(1 + \cos x) = 2$.

6.47. Решите уравнение:

1) $\log_x \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$; 2) $\log_{\sin 3x}(\cos x - \cos 2x) = 1$.

6.48. Решите уравнение $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2\pi x + 1) = 1$.

6.49. Решите уравнение $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) = 1$.

6.50. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x}, \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y. \end{cases}$

6.51. Решите уравнение $\log_2 \dfrac{x}{\sqrt{4x-3}} = \sqrt{4x-3} - x$.

6.52. Учащийся решает уравнение $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x = \log_{\frac{1}{16}} x$ так:

1) поскольку при $x = \dfrac{1}{2}$ выполняются равенства $\left(\dfrac{1}{16}\right)^x = \left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{4}$ и $\log_{\frac{1}{16}} x = \log_{\frac{1}{16}} \dfrac{1}{2} = \log_{2^{-4}} 2^{-1} = \dfrac{1}{4}$, то число $x = \dfrac{1}{2}$ — корень данного уравнения;

2) построив графики функций $y = \left(\dfrac{1}{16}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ (рис. 6.3), учащийся говорит, что уравнение не имеет других корней, кроме $x = \dfrac{1}{2}$.

Прав ли учащийся, сделав такой вывод?

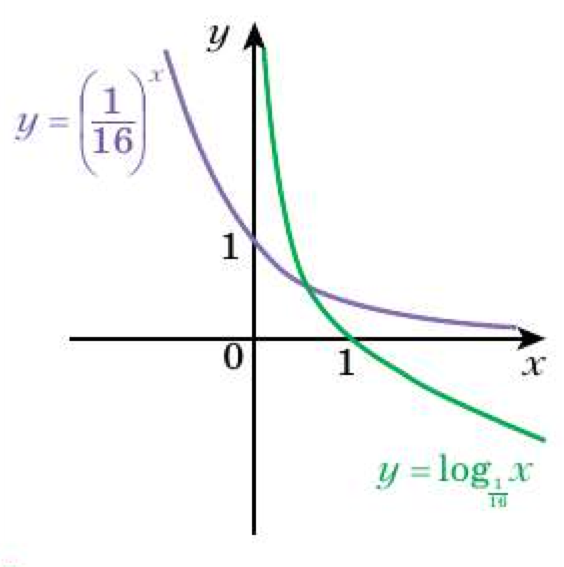


Рис. 6.3

§ 7 Логарифмические неравенства

При решении многих логарифмических неравенств используют следующую теорему.

Теорема 7.1

При $a > 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $x_1 > x_2 > 0$; при $0 < a < 1$ неравенство $\log_a x_1 > \log_a x_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $0 < x_1 < x_2$.

Справедливость этой теоремы следует из того, что при $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является возрастающей, а при $0 < a < 1$ — убывающей.

Следствие

Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись идеей доказательства следствия из теоремы 2.1, докажите это следствие самостоятельно.

Пример 1. Решите неравенство $\log_2 x > 3$.

Решение. Поскольку $3 = \log_2 2^3$, то можно записать:

$$\log_2 x > \log_2 2^3.$$

Это неравенство равносильно такому: $x > 2^3$. Отсюда $x > 8$.

Ответ: $(8; +\infty)$. ■

Пример 2. Решите неравенство $\log_{0,3} x \geqslant 1$.

Решение. Имеем: $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} 0,3$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x \leqslant 0,3, \\ x > 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0; 0,3]$. ■

Пример 3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(3x - 4) < \log_{\frac{1}{2}}(x - 2)$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе $\begin{cases} 3x - 4 > x - 2, \\ x - 2 > 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x > 1, \\ x > 2; \end{cases}$ $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$. ■

Пример 4. Решите неравенство $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{2^{-1}}(x-1) - 5 > 0.$

Решение. Так как областью определения данного неравенства является промежуток $(1;\ +\infty)$, то выполняется равенство $\log_2(x-1)^2 = 2\log_2(x-1)$.

Тогда данное неравенство можно записать так:

$$4\log_2^2(x-1) + \log_2(x-1) - 5 > 0.$$

Пусть $\log_2(x-1) = t$. Получаем: $4t^2 + t - 5 > 0;$ $\left[\begin{array}{l} t < -\dfrac{5}{4}, \\ t > 1. \end{array}\right.$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) < -\dfrac{5}{4}, \\ \log_2(x-1) > 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \log_2(x-1) < \log_2 2^{-\frac{5}{4}}, \\ \log_2(x-1) > \log_2 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 0 < x-1 < 2^{-\frac{5}{4}}, \\ x-1 > 2; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 1 < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}, \\ x > 3. \end{array}\right.$

Ответ: $\left(1;\ 1+\dfrac{1}{\sqrt[4]{32}}\right) \cup (3;\ +\infty)$. ■

Пример 5. Решите неравенство $\log_x 3 - \dfrac{5}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x > 0.$

Решение. Имеем: $\dfrac{1}{\log_3 x} - \dfrac{5}{2} + \log_3 x > 0.$

Пусть $\log_3 x = t$. Тогда $\dfrac{1}{t} - \dfrac{5}{2} + t > 0$. Отсюда

$$\frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} > 0; \quad \frac{(2t-1)(t-2)}{2t} > 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 7.1), получаем:

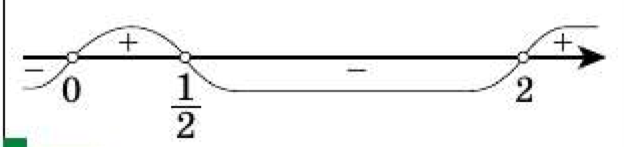


Рис. 7.1

$\left[\begin{array}{l} 0 < t < \dfrac{1}{2}, \\ t > 2. \end{array}\right.$

Далее, $\left[\begin{array}{l} 0 < \log_3 x < \dfrac{1}{2}, \\ \log_3 x > 2; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1 < x < \sqrt{3}, \\ x > 9. \end{array}\right.$

Ответ: $(1;\ \sqrt{3}) \cup (9;\ +\infty)$. ■

Пример 6. Решите неравенство $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Решение. Запишем данное неравенство так: $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$. Это неравенство равносильно совокупности двух систем.

1) $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} 0 < x < 1, \\ 3x - 1 > 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1, \\ \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < 1; \end{array}\right. \end{cases}$

$\frac{1}{3} < x < 1$.

2) $\begin{cases} x > 1, \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1. \end{cases}$ Отсюда $\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1, \\ 1 < x < 2; \end{cases}$ $1 < x < 2$.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$. ■

Пример 7. Решите неравенство $\log_3(x+7) < 4 - x$.

Решение. Имеем: $\log_3(x+7) + x - 4 < 0$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \log_3(x+7) + x - 4$. Она возрастает на $D(f) = (-7; +\infty)$. Заметим, что $f(2) = 0$. Следовательно, при $x > 2$ получим, что $f(x) > f(2)$, т. е. $f(x) > 0$, а при $-7 < x < 2$ получим, что $f(x) < f(2)$, т. е. $f(x) < 0$.

Ответ: $(-7; 2)$. ■

? Сформулируйте теоремы, которые используют при решении логарифмических неравенств.

Упражнения

7.1. Решите неравенство:

1) $\log_{0,1} x < \log_{0,1} 9$;
2) $\log_{11} x > \log_{11} 12$;
3) $\log_{0,8} x > \log_{0,8} 14$;
4) $\log_7 x < \log_7 15$;
5) $\log_{\frac{3}{7}}(x+5) < \log_{\frac{3}{7}} 8$;
6) $\log_8(2x-3) > \log_8 7$;
7) $\log_{\frac{2}{9}}(x-4) > \log_{\frac{2}{9}} 2$;
8) $\lg(1+3x) < \lg 16$.

7.2. Решите неравенство:

1) $\lg x < \lg 4$;

2) $\log_{\frac{5}{6}} x > \log_{\frac{5}{6}} \frac{6}{7}$;

3) $\log_{12}(x - 8) > \log_{12}3$;

4) $\log_{16}(4x - 6) < \log_{16}10$;

5) $\log_{\frac{8}{11}}(2 - x) < \log_{\frac{8}{11}} 2$;

6) $\log_{0,9}(2x + 1) > \log_{0,9}5$.

7.3. Решите неравенство:

1) $\log_7 x > 2$;

2) $\log_5 x \leqslant -1$;

3) $\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 5$;

4) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$;

5) $\log_2(5x + 1) > 4$;

6) $\log_{0,6}(x - 2) < 2$;

7) $\log_3(2x - 1) \leqslant 3$;

8) $\log_7(9x + 4) \leqslant 2$;

9) $\log_{0,5}(2x + 1) \geqslant -2$;

10) $\log_{0,2}(x + 6) \geqslant -1$.

7.4. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{7}} x < -1$;

2) $\log_4 x > 2$;

3) $\lg x < 5$;

4) $\log_{\frac{1}{6}} x > -3$;

5) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 3) \geqslant -2$;

6) $\log_9(5x + 6) \leqslant 2$.

7.5. Сколько целых решений имеет неравенство:

1) $\log_{0,25}(3x - 5) > -3$;

2) $\log_3(7 - x) < 3$?

7.6. Найдите целые решения неравенства:

1) $\log_{0,5}(1 - x) > -1$;

2) $\log_{36}(x + 1) \leqslant 0,5$.

7.7. Найдите множество решений неравенства:

1) $\lg(2x + 3) > \lg(x - 1)$;

2) $\log_5 2x < \log_5(x + 1)$;

3) $\log_{0,2}(2x - 1) > \log_{0,2}(3x - 4)$;

4) $\log_{0,4}(x^2 - 3) < \log_{0,4}(x + 3)$;

5) $\log_{0,7}(x^2 - 2x - 3) \leqslant \log_{0,7}(9 - x)$;

6) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x + 31) \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(10x + 11)$.

7.8. Решите неравенство:

1) $\log_2(2x - 3) < \log_2(x + 1)$;

2) $\log_{0,6}(3 - 2x) > \log_{0,6}(5x - 2)$;

3) $\lg(x^2 - 2) \geqslant \lg(4x + 3)$;

4) $\log_{0,1}(10 - 2x) \geqslant \log_{0,1}(x^2 - x - 2)$.

7.9. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) > -\frac{3}{2}$;

2) $\log_{\sqrt{3}}(12 - x^2) > 2$;

3) $\log_{\frac{1}{7}}(3 - x) > -1$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 5) > \log_{\frac{1}{3}}(x + 1)$.

7.10. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{6}}(x+2) \leqslant 0$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(6-x) > -2$;

3) $\log_{0,3}(4x-3) \geqslant \log_{0,3}(x+3)$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+1) \geqslant -1$.

7.11. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_8(x^2-4x+3) \leqslant 1$;

2) $\log_{0,5}(x^2+x) > -1$;

3) $\log_{0,7}(x^2+10x+25) > 0$;

4) $\log_2(x^2-3x) \leqslant 2$;

5) $\log_2 \dfrac{4x-5}{4x+7} > 0$;

6) $\lg \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2} > 0$;

7) $\log_3 \dfrac{2x+5}{x+1} \leqslant 1$;

8) $\log_4 \dfrac{3x-1}{x} \leqslant 0,5$.

7.12. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-5x+7) > 0$;

2) $\log_9(x^2-6x+8) \leqslant 0,5$;

3) $\log_{0,5}(x^2+3x) \geqslant -2$;

4) $\log_{0,3}(x^2-2x+1) \geqslant 0$;

5) $\log_4 \dfrac{3x-1}{x-1} \leqslant 1$;

6) $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2x-1}{3x+1} > 1$.

7.13. Решите неравенство:

1) $\log_{0,3}(x^2+x-12) \geqslant \log_{0,3}(6x-6)$;

2) $\lg(x^2-x) \leqslant \lg(3x-3)$;

3) $\log_{0,8}(1-x^2) > \log_{0,8}(x^2+5x-2)$;

4) $2\log_2(2x+7) \geqslant 5+\log_2(x+2)$;

5) $\log_3(x^2+2x-3) \leqslant \log_3(x+9)$;

6) $\log_{\frac{1}{7}}(2x^2+3x+1) \geqslant 2\log_{\frac{1}{7}}(1-x)$.

7.14. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{2}{3}}(6-2x) < \log_{\frac{2}{3}}(x^2-2x-3)$;

2) $\log_{0,1}(x^2-3x-4) \geqslant \log_{0,1}(x+1)$;

3) $2\log_2(x+5) \leqslant 3+\log_2(11+x)$;

4) $\lg(2x^2-9x+4) \leqslant 2\lg(x+2)$.

7.15. Решите неравенство:

1) $\lg x + \lg(x-3) > 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}} x < -1$;

3) $\log_2 x + \log_2(x+4) < 5$;

4) $\log_{0,1}(x-5) + \log_{0,1}(x-2) \geqslant -1$;

5) $\log_6(5x+8)+\log_6(x+1)\leqslant 1-\log_6 3$;

6) $\log_3(1-x)+\log_3(-5x-2)\geqslant 2\log_3 2+1$.

7.16. Решите неравенство:

1) $\log_2(-x)+\log_2(1-x)\leqslant 1$;

2) $\log_{0,2}(x-1)+\log_{0,2}(x+3)\geqslant -1$;

3) $\log_3(x-2)+\log_3(x-10)\geqslant 2$;

4) $\log_7 x+\log_7(3x-8)\geqslant 1+2\log_7 2$.

7.17. Решите неравенство:

1) $\log_{0,2}^2 x\leqslant 1$;

2) $\log_{\frac{1}{3}}^2 x\geqslant 4$;

3) $\lg^2 x+3\lg x-4<0$;

4) $\log_{\frac{1}{4}}^2 x+2\log_{\frac{1}{4}} x-8\leqslant 0$;

5) $\log_2^2 x-5\log_2 x+6\geqslant 0$;

6) $2\log_{\frac{1}{9}}^2 x-5\log_{\frac{1}{9}} x+2\geqslant 0$.

7.18. Решите неравенство:

1) $\log_{0,5}^2 x\geqslant 9$;

2) $\lg^2 x-2\lg x-3\geqslant 0$;

3) $2\log_4^2 x-\log_4 x-1<0$;

4) $\log_{0,2}^2 x-\log_{0,2} x-2\leqslant 0$.

7.19. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_2^2(4x)+2\log_2 x-11<0$;

2) $\log_3^2(27x)+3\log_3 x-19\geqslant 0$;

3) $\dfrac{\lg^2 x+\lg x-6}{\lg x}\geqslant 0$;

4) $2\log_5 x-\log_x 5\leqslant 1$.

7.20. Решите неравенство:

1) $\log_7^2(7x)-\log_7 x\geqslant 3$;

2) $\log_6^2\dfrac{x}{216}+8\log_6 x-12\leqslant 0$;

3) $\dfrac{\log_3^2 x-6\log_3 x+8}{\log_3 x-1}\geqslant 0$;

4) $\log_{0,5} x-2\log_x 0,5\leqslant 1$.

7.21. Решите неравенство:

1) $\log_{1,6}\log_{0,5}(x^2-x-6)\geqslant 0$;

2) $\log_{0,5}\log_4(2x^2+x-1)<1$;

3) $\log_{\frac{1}{9}}\log_3\dfrac{x}{x-1}\geqslant 0$;

4) $\log_{1,5}\log_3\dfrac{3x-5}{x+1}\leqslant 0$.

7.22. Решите неравенство:

1) $\log_{\frac{7}{4}}\log_5(x^2-2x-3)\leqslant 0$;

2) $\log_{0,8}\log_2\dfrac{3x-1}{2-x}>0$.

7.23. Решите неравенство:

1) $\log_{2x-3} x>1$;

2) $\log_{x-2}(2x-9)<0$;

3) $\log_{x+1}(5-x)>1$;

4) $\log_{x-2}(2x-7)<1$;

5) $\log_x(x+2)\leqslant 2$;

6) $\log_x(2x^2-3x)\leqslant 1$.

7.24. Решите неравенство:

1) $\log_{3x-2} x < 1$;

2) $\log_x (x^2 - 7x + 13) > 0$;

3) $\log_{x-1}(4 - x) < 1$;

4) $\log_x (6 - x) \geqslant 2$.

7.25. Решите неравенство $\sqrt{2 \cdot 5^x - 1} > 5^x - 2$.

7.26. Решите неравенство $\sqrt{20 \cdot 3^x - 11} > 3^x - 4$.

7.27. Решите неравенство:

1) $\sqrt{-x^2 + 7x - 10} \log_2 (x - 3) \leqslant 0$;

2) $\sqrt{4 - x^2} \left(\log_3 \dfrac{x+1}{x} + 2 \right) \leqslant 0$;

3) $(x^2 - 2{,}8x + 1{,}8) \sqrt{\log_{\frac{1}{5}} |x - 2|} \geqslant 0$.

7.28. Решите неравенство:

1) $\sqrt{-x^2 + 6x - 5} \log_3 (x - 2) \leqslant 0$;

2) $\dfrac{\log^2_{\sqrt{2}} (x - 3)}{x^2 - 4x - 5} \geqslant 0$.

7.29. Для каждого значения параметра a решите неравенство $(2^x - a)\sqrt{x - 3} \geqslant 0$.

7.30. Для каждого значения параметра a решите неравенство $(3^x - a)\sqrt{x - 2} \leqslant 0$.

7.31. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_x (2 \sin x + 1) \leqslant 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

7.32. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_x (2 \cos x + 1) \leqslant 0, \\ 0 < x < 2\pi. \end{cases}$

7.33. Решите неравенство $(\sqrt{x + 2} + 1) \log_3 (x^2 + 4x + 13) \geqslant 2$.

7.34. Решите неравенство $\log_3 (\sqrt{x - 1} + 3) \cdot \log_5 (x^2 + x + 3) \geqslant 1$.

§ 8 Производные показательной и логарифмической функций

Существует ли функция, производная которой равна самой функции? Ответить на этот вопрос легко. Например, функция, которая является нулевой константой, обладает этим свойством.

А можно ли указать такую функцию f, определённую на $\boldsymbol{R}$, отличную от нулевой константы, чтобы $f'(x) = f(x)$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$? Ответ на этот вопрос неочевиден.

Оказывается, что среди показательных функций $f(x) = a^x$ существует единственная функция такая, что $f'(x) = f(x)$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$. Для этой функции число, которое является основанием степени, обозначают буквой e, и саму функцию записывают в виде $f(x) = e^x$. Таким образом,

$$\boxed{(e^x)' = e^x}$$

Установлено, что число e — иррациональное. Его можно записать в виде бесконечной непериодической десятичной дроби:

$$e = 2{,}71828182845\ldots .$$

Функцию $f(x) = e^x$ называют **экспонентой.**

Отметим одну особенность графика экспоненты.

Имеем: $f'(0) = f(0) = e^0 = 1$.

Следовательно, касательная к графику экспоненты в точке с абсциссой, равной нулю, имеет угловой коэффициент, равный 1. Значит, эта касательная образует угол 45° с положительным направлением оси абсцисс (рис. 8.1).

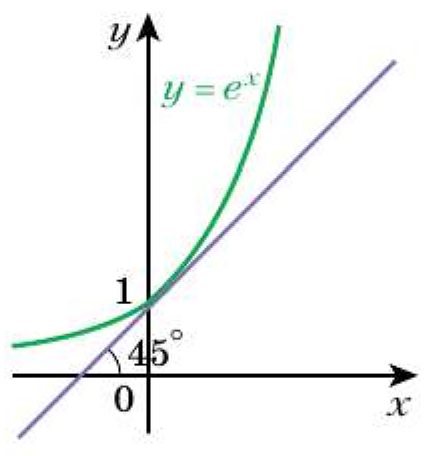


Рис. 8.1

Выведем формулу для нахождения производной показательной функции $f(x) = a^x$.

Имеем: $a = e^{\log_e a}$.

Тогда $a^x = e^{x \log_e a}$.

Пользуясь правилом вычисления производной сложной функции, запишем: $(a^x)' = (e^{x \log_e a})' = e^{x \log_e a} \cdot (x \log_e a)' = a^x \log_e a$.

Логарифм по основанию e называют **натуральным логарифмом** и обозначают $\ln a$, т. е. $\log_e a = \ln a$.

Тогда при $a > 0$, $a \neq 1$ можно записать:

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

В § 5 было отмечено, что логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ является дифференцируемой. Выведем формулу для вычисления производной логарифмической функции.

Для любого $x > 0$ выполняется равенство $x = e^{\ln x}$. Тогда функции $f(x) = x$, $D(f) = (0; +\infty)$ и $g(x) = e^{\ln x}$, $D(g) = (0; +\infty)$ представляют собой одну и ту же функцию. Поэтому для любого $x \in (0; +\infty)$ выполняется равенство $f'(x) = g'(x)$, т. е. $(x)' = (e^{\ln x})'$.

Левая часть этого равенства равна 1. В правой части получаем: $(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot (\ln x)' = x(\ln x)'$. Тогда $1 = x(\ln x)'$. Отсюда

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Имеем: $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}$.
Следовательно,

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}}$$

Покажем, как производную показательной функции можно использовать для нахождения производной степенной функции $f(x) = x^\alpha$, $D(f) = (0; +\infty)$, где α — произвольное действительное число.

Представим функцию $f(x) = x^\alpha$ в виде сложной функции $f(x) = e^{\alpha \ln x}$. Поскольку функции $y = e^x$ и $y = \alpha \ln x$ дифференцируемы, то функция f также является дифференцируемой.

Вычислим производную функции f. Имеем:

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' = e^{\alpha\ln x} \cdot (\alpha \ln x)' = e^{\alpha\ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Таким образом,

$$\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$$

Пример 1. Найдите производную функции:

1) $y = e^x(x^2 - 4x)$; 3) $y = e^{-7x}$; 5) $y = \log_6^2 x$;

2) $y = x^3 \cdot 3^x$; 4) $y = \frac{x^4}{\ln x}$; 6) $y = \log_2(3x - 4)$.

Решение. 1) Применяя теорему о производной произведения, получаем:

$$y' = (e^x)' \cdot (x^2 - 4x) + (x^2 - 4x)' \cdot e^x =$$
$$= e^x(x^2 - 4x) + (2x - 4)e^x = e^x(x^2 - 2x - 4).$$

2) Имеем:

$$y' = (x^3)' \cdot 3^x + (3^x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot 3^x + 3^x \ln 3 \cdot x^3 = 3^x x^2(3 + x\ln 3).$$

3) Используя теорему о производной сложной функции, запишем: $y' = (e^{-7x})' = e^{-7x} \cdot (-7x)' = -7e^{-7x}$.

4) Имеем:

$$y' = \frac{(x^4)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \cdot \ln x - \frac{1}{x} \cdot x^4}{\ln^2 x} = \frac{4x^3 \ln x - x^3}{\ln^2 x} = \frac{x^3(4\ln x - 1)}{\ln^2 x}.$$

5) Применяя теорему о производной сложной функции, получаем:

$$y' = (\log_6^2 x)' = 2\log_6 x \cdot (\log_6 x)' = \frac{2\log_6 x}{x\ln 6}.$$

6) Имеем: $y' = (\log_2(3x-4))' = \dfrac{1}{(3x-4)\ln 2} \cdot (3x-4)' = \dfrac{3}{(3x-4)\ln 2}$. ■

Пример 2. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = e^{3x} + x$, если эта касательная параллельна прямой $y = 4x - 9$.

Решение. Поскольку угловой коэффициент прямой $y = 4x - 9$ равен 4, то угловой коэффициент искомой касательной $k = 4$.

Найдём абсциссу x_0 точки касания. Имеем: $f'(x) = 3e^{3x} + 1$. Поскольку $f'(x_0) = 4$, то $3e^{3x_0} + 1 = 4$; $3e^{3x_0} = 3$; $e^{3x_0} = 1$; $x_0 = 0$. Отсюда $f(x_0) = 1$.

Тогда искомое уравнение имеет вид $y = 4x + 1$.

Ответ: $y = 4x + 1$. ■

Пример 3. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = e^{6x - x^2 + 5}$;

2) $f(x) = x\ln x$;

3) $f(x) = \lg^3 x - 3\lg x + 2$.

Решение. 1) Имеем: $f'(x) = (e^{6x - x^2 + 5})' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6x - x^2 + 5)' = e^{6x - x^2 + 5} \cdot (6 - 2x)$. Исследовав знак производной функции f (рис. 8.2), получаем, что функция f возрастает на промежутке $(-\infty; 3]$, убывает на промежутке $[3; +\infty)$, $x_{\max} = 3$.

2) Имеем: $f'(x) = (x)' \cdot \ln x + (\ln x)' \cdot x = \ln x + \dfrac{1}{x} \cdot x = \ln x + 1$.

Исследуем знак f' на $D(f) = (0; +\infty)$. Имеем: $f'(x) > 0$, если $\ln x > -1$. Отсюда $x > \dfrac{1}{e}$. Аналогично находим, что $f'(x) < 0$ при $0 < x < \dfrac{1}{e}$.

Получаем, что функция f возрастает на промежутке $\left[\dfrac{1}{e}; +\infty\right)$, убывает на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{e}\right]$, $x_{\min} = \dfrac{1}{e}$ (рис. 8.3).

3) Имеем: $f'(x) = 3\lg^2 x \cdot (\lg x)' - 3 \cdot \dfrac{1}{x\ln 10} =$

$$= \frac{3\lg^2 x}{x\ln 10} - \frac{3}{x\ln 10} = \frac{3(\lg^2 x - 1)}{x\ln 10} = \frac{3(\lg x - 1)(\lg x + 1)}{x\ln 10}.$$

Тогда $f'(x) = 0$, если $\lg x = -1$ или $\lg x = 1$. Следовательно, данная функция имеет две критические точки: $x = \dfrac{1}{10}$ и $x = 10$. Исследовав знак

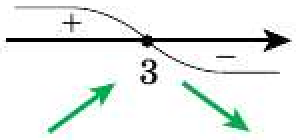


Рис. **8.2**

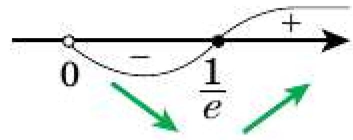


Рис. **8.3**

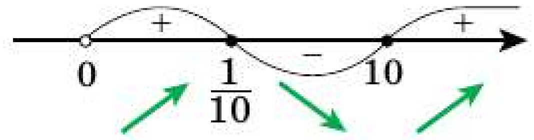


Рис. **8.4**

производной функции f на $D(f) = (0; +\infty)$ (рис. 8.4), приходим к выводу, что функция f возрастает на промежутках $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ и $[10; +\infty)$, убывает на промежутке $\left[\frac{1}{10}; 10\right]$, $x_{max} = \frac{1}{10}$, $x_{min} = 10$. ■

Пример 4. Докажите, что:

1) показательная функция $y = a^x$ является выпуклой вниз;

2) при $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является выпуклой вверх, а при $0 < a < 1$ — выпуклой вниз.

Решение. 1) Имеем: $y' = a^x \ln a$; $y'' = a^x \ln^2 a$.

Поскольку $y'' > 0$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$, то показательная функция $y = a^x$ является выпуклой вниз.

2) Запишем: $y' = \dfrac{1}{x \ln a}$; $y'' = -\dfrac{1}{x^2 \ln a}$.

Если $a > 1$, то $\ln a > 0$. Поэтому $y'' < 0$ для всех $x \in (0; +\infty)$. Следовательно, при $a > 1$ логарифмическая функция $y = \log_a x$ является выпуклой вверх.

При $0 < a < 1$ аналогично можно доказать, что $y'' > 0$ и логарифмическая функция $y = \log_a x$ является выпуклой вниз. ■

?

1. Какую функцию называют экспонентой?

2. Что называют натуральным логарифмом?

3. По каким формулам дифференцируют показательную и логарифмические функции?

4. По какой формуле можно найти производную степенной функции?

Упражнения

8.1. Найдите производную функции:

1) $y = 4e^x$;	4) $y = e^x \sin x$;	7) $y = 5^x$;	10) $y = x \cdot 3^x$;
2) $y = e^{5x}$;	5) $y = \dfrac{e^x}{x-2}$;	8) $y = 2^{x^2}$;	11) $y = \dfrac{2^x - 3}{2^x + 1}$;
3) $y = x^3 e^x$;	6) $y = e^x + e^{-x}$;	9) $y = 7^{2x-3}$;	12) $y = 0{,}3^{\operatorname{tg} x}$.

8.2. Найдите производную функции:

1) $y = e^{-2x}$; 4) $y = \dfrac{x+1}{e^x}$; 7) $y = 10^{-x}$;

2) $y = x^6 e^x$; 5) $y = 6^x$; 8) $y = \dfrac{5^x + 2}{5^x - 1}$;

3) $y = e^x \cos x$; 6) $y = 3^{4x+1}$; 9) $y = 0{,}7^{\operatorname{ctg} x}$.

8.3. Найдите производную функции:

1) $y = \log_9 x$; 6) $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$;

2) $y = \ln 2x$; 7) $y = \log_{0,2}(2x^2 + x - 4)$;

3) $y = \lg(x^2 - 4)$; 8) $y = \ln(1 - 0{,}2x)$;

4) $y = \ln^2 x$; 9) $y = x^5 \ln x$.

5) $y = \ln \sin x$;

8.4. Найдите производную функции:

1) $y = \lg x$; 3) $y = \ln^3 x$; 5) $y = \dfrac{x^5}{\ln x}$;

2) $y = \ln(5x - 4)$; 4) $y = \lg \cos x$; 6) $y = \log_2(x^2 + 6)$.

8.5. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = e^{3x} - 3x$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = e^{-2x}\cos 2x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = 3^{3x - 4x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

8.6. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = e^{5x} + e^{-4x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = e^{-x} \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = 4^{x^2 - 3x - 4}$, $x_0 = -1$.

8.7. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \dfrac{1}{6}\ln(-12x)$, $x_0 = -\dfrac{1}{6}$;

2) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \ln x^2$, $x_0 = 4$;

3) $f(x) = \log_5(x^2 + 3x - 2)$, $x_0 = -4$;

4) $f(x) = \ln \sin \dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

8.8. Вычислите значение производной функции f в точке x_0:

1) $f(x) = \ln(6x - 5)$, $x_0 = 3$; 3) $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 8)$, $x_0 = 2$;

2) $f(x) = 8\ln\dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$; 4) $f(x) = \ln\cos\dfrac{x}{3}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

8.9. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{2x+1}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = x - \ln x$, $x_0 = 3$.

8.10. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{1-x}$, $x_0 = 1$;

2) $f(x) = \log_5(x+2)$, $x_0 = -1$.

8.11. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{-2x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = e^x + \sin x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = x \cdot 2^x$, $x_0 = 1$;

4) $f(x) = 6^{3x+4}$, $x_0 = -1$;

5) $f(x) = 3x + \ln x$, $x_0 = 1$;

6) $f(x) = \ln(5+4x)$, $x_0 = -1$;

7) $f(x) = \log_3(2x+1)$, $x_0 = 1$;

8) $f(x) = 2\ln(x-2)$, $x_0 = 4$.

8.12. Составьте уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = e^{5x}$, $x_0 = 0$;

2) $f(x) = 2e^x - \cos x$, $x_0 = 0$;

3) $f(x) = 3^{2x-3}$, $x_0 = 2$;

4) $f(x) = 4x - \ln 4$, $x_0 = 1$;

5) $f(x) = \ln(3x-5)$, $x_0 = 2$;

6) $f(x) = \log_2(x+3)$, $x_0 = 1$.

8.13. Найдите уравнение горизонтальной касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x + e^{-x}$;

2) $f(x) = (2^x - 7)(2^x - 9)$.

8.14. Найдите уравнение горизонтальной касательной к графику функции $f(x) = (5^x - 65)(5^x + 15)$.

8.15. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^x$, если эта касательная параллельна прямой $y = ex - 6$;

2) $f(x) = e^{5x+2}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5x + 7$;

3) $f(x) = e^{-2x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = -x$;

4) $f(x) = \ln(3x-2)$, если эта касательная параллельна прямой $y = 3x - 2$.

8.16. Составьте уравнение касательной к графику функции:

1) $f(x) = e^{6-7x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 5 - 7x$;

2) $f(x) = e^x - e^{-x}$, если эта касательная параллельна прямой $y = 2x - 3$;

3) $f(x) = 6x - \ln x$, если эта касательная параллельна прямой $y = x$;

4) $f(x) = \ln(1-x)$, если эта касательная параллельна прямой $y = 1 - x$.

8.17. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = e^x - x$;
2) $f(x) = xe^{2x}$;
3) $f(x) = (1 - x)e^{x+1}$;
4) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$;
5) $f(x) = 4xe^{2-x}$;
6) $f(x) = e^{x^2}$;
7) $f(x) = e^{4x - x^2 + 1}$;
8) $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$;
9) $f(x) = \frac{4x}{e^x}$;
10) $f(x) = x^3 \ln x$;
11) $f(x) = \ln x - x$;
12) $f(x) = x^2 \lg x$;
13) $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$;
14) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;
15) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;
16) $f(x) = x^2 - \ln x^2$;
17) $f(x) = 2\ln^3 x - 3\ln^2 x$;
18) $f(x) = \lg^2 x - \lg x$.

8.18. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = xe^{\frac{x}{2}}$;
2) $f(x) = e^{x^4 - 2x^2}$;
3) $f(x) = 5^{-x^3 + 3x + 1}$;
4) $f(x) = (4x - 1)e^{2x}$;
5) $f(x) = x^3 \cdot 3^{-x}$;
6) $f(x) = \frac{x+3}{e^x}$;
7) $f(x) = 0{,}5x^2 - \ln x$;
8) $f(x) = x\ln^2 x$;
9) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;
10) $f(x) = \ln x^2 + \frac{2}{x}$;
11) $f(x) = \ln^3 x - 12\ln x$;
12) $f(x) = \lg^4 x - 2\lg^2 x$.

8.19. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = e^x + x$ на промежутке $[-1; 1]$;
2) $f(x) = x^2e^{2x}$ на промежутке $[-2; 1]$;
3) $f(x) = 7^{x^2 - 2x}$ на промежутке $[0; 2]$;
4) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ на промежутке $[-1; 1]$.

8.20. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = (x - 1)e^{-x}$ на промежутке $[1; 3]$;
2) $f(x) = 5^{x^2 + 2x}$ на промежутке $[-2; 1]$.

8.21. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = xe^x$;
2) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$;
3) $f(x) = e^{-x^2}$;
4) $f(x) = x^2 - 2\ln x$;
5) $f(x) = \ln(9 - x^2)$.

8.22. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = \frac{x}{e^x}$; 2) $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$; 3) $f(x) = \log_2(x^2 + x)$.

8.23. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = e^x - x - 1$ и докажите, что при $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство $e^x \geqslant 1 + x$.

8.24. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = \ln(1 + x) - x$ и докажите, что при $x > -1$ выполняется неравенство $\ln(1 + x) \leqslant x$.

8.25. При каких значениях a функция $y = 4\ln x - ax - 7$ является возрастающей?

8.26. При каких значениях a функция $y = 2 - 3e^x - ax$ является убывающей?

8.27. При каких значениях параметра m функция $f(x) = 2e^x - me^{-x} + (1 + 2m)x - 3$ является возрастающей?

8.28. При каких значениях параметра a функция $f(x) = 1 - 2e^x + (1 - a)e^{-x} - e^{2x} + (a - 1)x$ является убывающей?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Неравенство Йенсена

В 10 классе вы ознакомились с таким свойством функции, как выпуклость. Покажем, как это свойство помогает доказывать неравенства.

Теорема 1

Если функция f является выпуклой вверх на промежутке I, то для любых a и b из промежутка I выполняется неравенство

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Эта теорема имеет простую геометрическую интерпретацию (рис. 8.5). Если функция f является выпуклой вверх на промежутке, то ордината точки M не меньше, чем ордината точки M_1.

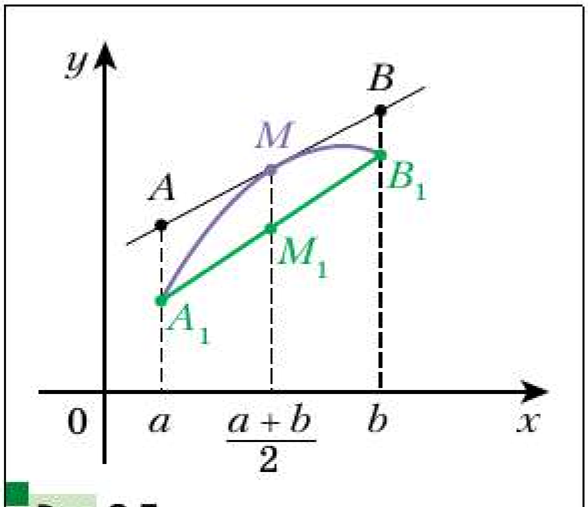


Рис. 8.5

Доказательство

Проведём касательную к графику функции f в точке M (см. рис. 8.5). Поскольку функция f выпуклая вверх, то точка A лежит не ниже точки A_1, а точка B — не ниже точки B_1. Поэтому середина отрезка AB (точка M) лежит не ниже середины отрезка A_1B_1 (точка M_1). Это и означает, что ордината точки M не меньше, чем ордината точки M_1. ■

Теорема 1 имеет такое обобщение.

Теорема 2

Если функция f является выпуклой вверх на промежутке I, то для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из промежутка I выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}. \quad (1)$$

Неравенство (1) называют **неравенством Йенсена для выпуклой вверх функции**.

Заметим, что для выпуклой вниз функции f знак неравенства (1) изменяется на противоположный, т. е. *для любых $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из промежутка I выполняется неравенство*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)}{n}.$$

Это неравенство называют **неравенством Йенсена для выпуклой вниз функции**.

Если вы хотите ознакомиться с доказательством неравенства Йенсена, а также узнать о возможностях применения этого неравенства, то советуем принять участие в работе над проектом «Выпуклые функции и доказательство неравенств». Здесь мы ограничимся доказательством неравенства Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом n неотрицательных чисел.

Теорема 3

(неравенство Коши)

Для любых $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

Доказательство

Если одно из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно нулю, то доказываемое неравенство очевидно.

Обратимся к случаю, когда $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x$. Имеем: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) < 0$. Поэтому функция $f(x) = \ln x$ является выпуклой вверх. Следовательно, для неё выполняется неравенство Йенсена:

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n}{n}.$$ Отсюда

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\ln(x_1x_2\ldots x_n);$$

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \geqslant \ln(x_1x_2\ldots x_n)^{\frac{1}{n}};$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$ ■

Легко исследовать на выпуклость функции $g(x) = x^k$ и $h(x) = \frac{1}{x}$. Сделайте это самостоятельно. Воспользовавшись полученными результатами, докажите в качестве упражнений следующие два неравенства:

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^k \leqslant \frac{x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k}{n},$$

где $x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0,\ k \in \boldsymbol{N}$;

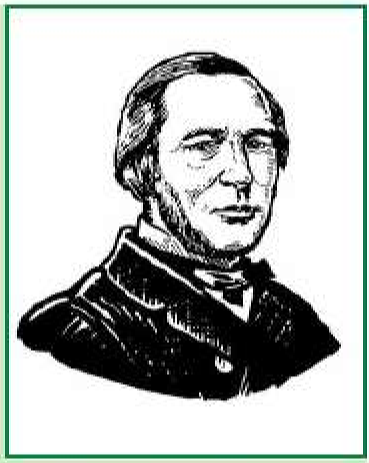
$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}},$$

где $x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ \ldots,\ x_n > 0$.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Русский Архимед

Так называли современники одного из величайших учёных — русского математика и механика, основоположника петербургской математической школы Пафнутия Львовича Чебышёва (1821–1894).



Пафнутий Львович Чебышёв

За свою жизнь П. Л. Чебышёв совершил столько важнейших математических открытий, что практически любую главу учебника можно было бы проиллюстрировать одним из достижений П. Л. Чебышёва. Ведь можно рассказать о фундаментальном вкладе Чебышёва в теорию вероятностей, где Пафнутий Львович доказал закон больших чисел, а можно — о созданной им теории наилучшего приближения функций многочленами или о влиянии его работ на так называемую «проблему тысячелетия» — расположение нулей дзета-функции среди комплексных чисел. В результате долгих обсуждений мы решили рассказать о проблеме, которая более двадцати веков волнует умы учёных, и роли П. Л. Чебышёва в её решении. Примечательно то, что в этой истории важное место занимает функция $y = \ln x$, с которой вы ознакомились в § 8.

Простые числа составляют одну из главных загадок математики. Напомним, что простым называют натуральное число, имеющее среди натуральных чисел только два делителя. Например, простыми числами являются:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13.$$

Простые числа расположены в ряду натуральных чисел чрезвычайно неравномерно. Например, среди следующего набора последовательных натуральных чисел

$$n! + 2,\ n! + 3,\ n! + 4,\ \ldots,\ n! + n, \text{ где } n \in \boldsymbol{N} \text{ и } n > 1, \tag{1}$$

нет ни одного простого (см. приложение к учебнику «Алгебра и начала анализа. 10 класс»). Другими словами, в последовательности натуральных чисел есть сколь угодно длинные промежутки, не содержащие ни одного простого числа. Вопрос о том, как простые числа распределены среди чисел натурального ряда, является одной из самых сложных и интересных задач математики. Эту задачу называют *проблемой распределения простых чисел*.

Главным объектом исследования проблемы распределения простых чисел является **функция распределения простых чисел** $y = \pi(n)$. Величина $\pi(n)$ показывает количество простых чисел на отрезке от 1 до n. Например, $\pi(6) = 3$, поскольку в диапазоне от 1 до 6 находится три простых числа: 2, 3 и 5. В следующей таблице представлены некоторые значения функции $\pi(n)$.

Значение n	1	2	3	4	5	6	7
Значение $\pi(n)$	0	1	2	2	3	3	4

С помощью функции $y = \pi(n)$ удобно записывать различные утверждения о простых числах. Например, сформулированное выше утверждение о том, что среди набора чисел (1) нет ни одного простого, можно записать так:

$$\pi(n! + n) = \pi(n! + 2).$$

С давних времён математики пытались найти удобную формулу для вычисления значений функции $y = \pi(n)$ или хотя бы описать её основные свойства.

Около 300 года до н. э. древнегреческий математик Евклид сделал первый шаг к разгадке тайны распределения простых чисел. Он доказал, что простых чисел бесконечно много, и тем самым установил важное свойство функции $y = \pi(n)$ — её неограниченное возрастание при $n \to \infty$. Но далее, на протяжении более двух тысяч лет, утверждение Евклида оставалось практически единственным строго обоснованным фактом о свойствах функции $y = \pi(n)$. В XVIII–XIX веках выдающиеся математики А. М. Лежандр, К. Ф. Гаусс, Л. Эйлер высказали ряд интересных гипотез о поведении функции $y = \pi(n)$, но их полные доказательства представить не смогли. Было подмечено, что поведение этой функции связано с логарифмической функцией $y = \ln x$, а именно: при больших значениях n выполняется приближённое равенство

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n}. \tag{2}$$

Например, если взять $n = 10^{10}$, то $\ln n = \ln 10^{10} \approx 23$ и $\frac{n}{\ln n} \approx 4{,}34 \cdot 10^8$. Это означает, что среди чисел от 1 до $n = 10^{10}$ в среднем только одно из 23 чисел является простым. В наши дни с помощью компьютера установлено, что количество простых чисел, расположенных в натуральном ряду между числами 1 и 10^{10}, равно $455\,052\,512 \approx 4{,}55 \cdot 10^8$.

П. Л. Чебышёву удалось найти первые корректные математические доказательства этих закономерностей, а также указать границы их применения. Например, он доказал, что для функции $y = \pi(n)$ выполняются неравенства

$$0{,}92\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < 1{,}11\frac{n}{\ln n},$$

оценивающие погрешность приближённой формулы (2).

По мнению многих специалистов, П. Л. Чебышёв был первым, кто за две тысячи лет после Евклида пошёл верным путём и достиг важных результатов в решении проблемы распределения простых чисел.

глава

2 Интеграл и его применение

- В этой главе вы ознакомитесь с операцией, обратной дифференцированию, изучите свойства этой операции. Ознакомитесь с понятием «определённый интеграл» и выясните его геометрический смысл.
- Вы научитесь находить закон движения материальной точки по известному закону изменения скорости, расширите класс фигур, площади которых сможете находить.

§ 9 Первообразная

Вы умеете по заданной функции находить её производную, знаете, что производная применяется во многих областях знаний. В частности, умея дифференцировать, по данному закону $y = s(t)$ движения материальной точки по координатной прямой можно найти закон $y = v(t)$ изменения её скорости, а именно:

$$v(t) = s'(t).$$

Нередко в механике приходится решать обратную задачу: находить закон движения по известному закону изменения скорости.

Например, из курса физики вам известен такой факт: если скорость тела изменяется по закону $v(t) = gt$ и $s(0) = 0$, то закон его движения задаётся формулой $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

Вы знаете, что нахождение производной заданной функции называют дифференцированием. Обратную операцию, т. е. нахождение функции по её производной, называют **интегрированием.**

Определение

Функцию F называют первообразной функцией (или коротко — первообразной) функции f на промежутке I, если для всех $x \in I$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = x^2$ является первообразной функции $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поскольку для любого x из этого промежутка выполняется равенство $(x^2)' = 2x$.

Часто в задачах, связанных с первообразной функции, промежуток I не указывают. В таких случаях считают, что $I = (-\infty; +\infty)$. Так, функция $F(x) = \cos x$ является первообразной функции $f(x) = -\sin x$. Действительно, равенство $(\cos x)' = -\sin x$ выполняется на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

Рассмотрим ещё один пример. Функция $F(x) = \sqrt{x}$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$, поскольку на этом промежутке выполняется равенство $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Однако на промежутке $[0; +\infty)$ функция $F(x) = \sqrt{x}$ не является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, так как в точке $x_0 = 0$ не выполняется равенство $F'(x_0) = f(x_0)$.

Рассмотрим функции $F_1(x) = x^2 + 1$ и $F_2(x) = x^2 - \sqrt{2}$. Каждая из них имеет одну и ту же производную $f(x) = 2x$. Поэтому обе функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f. Понятно, что каждая из функций вида $y = x^2 + C$, где C — любое число, является первообразной функции $f(x) = 2x$. Следовательно, задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений.

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все её первообразные на заданном промежутке.

Как связаны между собой все первообразные данной функции, указывает следующая теорема.

Теорема 9.1

(основное свойство первообразной)

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и C — любое число, то функция

$$y = F(x) + C$$

также является первообразной функции f на промежутке I.

Любую первообразную функции f на промежутке I можно представить в виде $y = F(x) + C$, где C — некоторое число.

Доказательство

Поскольку функция F — первообразная функции f на промежутке I, то для всех $x \in I$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$. Тогда

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Следовательно, функция $y = F(x) + C$ является первообразной функции f на промежутке I при любом значении C.

Пусть функция G — одна из первообразных функции f на промежутке I. Тогда $G'(x) = f(x)$ для всех $x \in I$. Имеем:

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Согласно признаку постоянства функции (теорема 11.1 учебника «Алгебра и начала анализа. 10 класс») получаем, что функция $y = G(x) - F(x)$ является константой на промежутке I, т. е. $G(x) - F(x) = C$, где C — любое число.

Отсюда $G(x) = F(x) + C$.

Таким образом, любую первообразную функции f на промежутке I можно представить в виде $y = F(x) + C$, где C — некоторое число. ■

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I, то запись $F(x) + C$, где C — любое число, называют **общим видом первообразных** функции f на промежутке I.

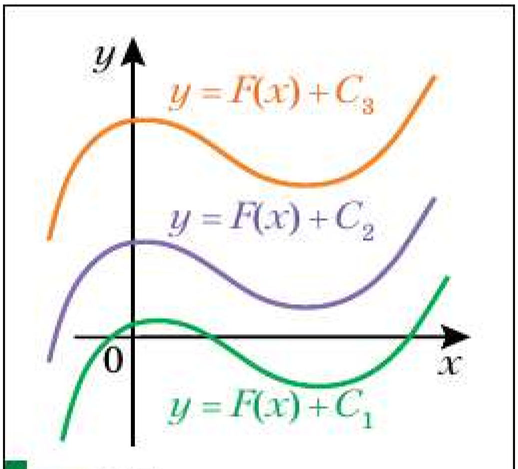


Рис. 9.1

Из основного свойства первообразной следует, что графики любых двух первообразных данной функции можно получить друг из друга параллельным переносом вдоль оси ординат (рис. 9.1).

Совокупность всех первообразных функции $y = f(x)$ на промежутке I называют её **неопределённым интегралом** и обозначают

$$\int f(x)dx$$

(читают: «интеграл эф от икс дэ икс»).

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Из теоремы 9.1 следует, что любую первообразную функции f на промежутке $(-\infty; +\infty)$ можно представить в виде $y = x^3 + C$, где C — некоторое число. Пишут:

$$\int 3x^2dx = x^3 + C, \text{ где } C \text{ — некоторое число.}$$

Пример 1. Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = x^5$.

Решение. Поскольку $\left(\frac{x^6}{6}\right)' = x^5$, то одной из первообразных функции $f(x) = x^5$ является функция $F(x) = \frac{x^6}{6}$. Тогда согласно теореме 9.1 запись $\frac{x^6}{6} + C$, где C — любое число, является общим видом первообразных данной функции. ■

Из решения примера 1 следует, что

$$\int x^5dx = \frac{x^6}{6} + C, \text{ где } C \text{ — любое число.}$$

Пример 2. Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Решение. На промежутке $(0; +\infty)$ имеет место равенство $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; на промежутке $(-\infty; 0)$ имеют место равенства $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$.

Следовательно, функция $y = \ln x$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$, а функция $y = \ln(-x)$ является первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

Поскольку $\ln|x| = \begin{cases} \ln x, \text{ если } x \in (0; +\infty), \\ \ln(-x), \text{ если } x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ то на любом промежутке, не содержащем точку 0, запись $\ln|x| + C$, где C — любое число, является общим видом первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x}$. ■

Пример 3. Для функции $f(x) = 2\cos x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{5\pi}{6}; 3\right)$.

Решение. Поскольку $(2\sin x)' = 2\cos x$, то функция $y = 2\sin x$ является одной из первообразных функции $f(x) = 2\cos x$. Следовательно, искомая первообразная имеет вид $F(x) = 2\sin x + C$, где C — некоторое число. Найдём это число.

Из условия следует, что $F\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 3$. Тогда $2\sin\frac{5\pi}{6} + C = 3$. Отсюда $C = 2$.

Таким образом, искомая первообразная имеет вид $F(x) = 2\sin x + 2$. ■

Первообразные функций, которые используются чаще всего, приведены в таблице.

Функция f	Первообразная функции f
k (постоянная)	kx
x^{α}, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

Функция f	Первообразная функции f
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
e^x	e^x
a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a}$

Обратим внимание, что в таблице указаны первообразные функций f на таких промежутках I, что $I \subset D(f)$.

Правильность заполнения этой таблицы проверьте самостоятельно с помощью операции дифференцирования.

Функция $F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq -1$, является первообразной функции $f(x) = x^\alpha$ на промежутке $(0; +\infty)$. Пользуясь этим, найдём, например, первообразную функции $f(x) = \sqrt[n]{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку на этом промежутке $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$, то функция $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}$ является первообразной функции f на промежутке $(0; +\infty)$. Учитывая равенства $\dfrac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} = \dfrac{x^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$, можно записать: $F(x) = \dfrac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

1. Какую функцию называют первообразной данной функции на заданном промежутке?

2. Сформулируйте основное свойство первообразной.

3. Какую запись называют общим видом первообразных функции f на заданном промежутке?

4. Что называют неопределённым интегралом функции f на промежутке I?

Упражнения

9.1. Определите, является ли функция F первообразной функции f:

1) $F(x) = 3x^2 + x - 2$, $f(x) = 6x + 1$;

2) $F(x) = x^{-4}$, $f(x) = -4x^{-5}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

3) $F(x) = \sin x + 3$, $f(x) = \cos x + 3$;

4) $F(x) = \cos 2x$, $f(x) = -\sin 2x$;

5) $F(x) = \sqrt{2x+1}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$;

6) $F(x) = 5^x$, $f(x) = 5^x \ln 5$.

9.2. Докажите, что функция F является первообразной функции f на промежутке I:

1) $F(x) = x^4 - 2x^2 + 6$, $f(x) = 4x^3 - 4x$, $I = (-\infty; +\infty)$;

2) $F(x) = \dfrac{1}{x^3}$, $f(x) = -\dfrac{3}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$;

3) $F(x) = 5 - 3\sqrt{x}$, $f(x) = -\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$;

4) $F(x) = 3\operatorname{tg}\dfrac{x}{3} + 6$, $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{3}}$, $I = \left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

9.3. Является ли функция $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$ первообразной функции $f(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ на промежутке:

1) $(0; +\infty)$;
2) $(-2; 2)$;
3) $(-\infty; 0]$;
4) $(-6; 0)$?

9.4. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = 5$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 2^x$;
5) $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
6) $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[1; +\infty)$;
7) $f(x) = \sqrt[5]{x}$ на промежутке $(-\infty; -3)$;
8) $f(x) = x^{-5}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

9.5. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = 0$;
2) $f(x) = x^8$;
3) $f(x) = \dfrac{1}{3^x}$;
4) $f(x) = \dfrac{1}{x^{20}}$ на промежутке $(0; +\infty)$;
5) $f(x) = \sqrt[7]{x}$ на промежутке $(4; +\infty)$;
6) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ на промежутке $[0,5; +\infty)$.

9.6. Проверьте, что:

1) $\int x\cos x dx = \cos x + x\sin x + C$;

2) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \sqrt{x^2+4} + C$,

где C — произвольное число.

9.7. Проверьте, что функция $F(x) = \frac{x-2}{3x-1}$ является первообразной функции $f(x) = \frac{5}{(3x-1)^2}$ на каждом из промежутков $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$, и запишите общий вид первообразных функции f на каждом из указанных промежутков.

9.8. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x) = x^2$, $A(-1; 3)$;

2) $f(x) = \sin x$, $B(\pi; -1)$;

3) $f(x) = e^x$, $C(0; -6)$.

9.9. Для функции f найдите первообразную, график которой проходит через указанную точку:

1) $f(x) = x^3$, $M\left(1; \frac{5}{4}\right)$;

2) $f(x) = \cos x$, $N\left(\frac{\pi}{6}; \frac{5}{2}\right)$;

3) $f(x) = 3^x$, $K\left(2; \frac{9}{\ln 3}\right)$.

9.10. Для функции f найдите на промежутке I первообразную F, которая принимает данное значение в указанной точке:

1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{3}\right) = -9$;

2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (-\infty; 0)$, $F(-e^3) = 7$;

4) $f(x) = \frac{1}{x^4}$, $I = (-\infty; 0)$, $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$.

9.11. Для функции f найдите на промежутке I первообразную F, которая принимает данное значение в указанной точке:

1) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $I = (0; \pi)$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $F(16) = 10$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{e}\right) = -2$;

4) $f(x) = 2^x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(5) = 1$.

9.12. Укажите график, изображённый на рисунке 9.2, который может быть графиком первообразной функции $f(x) = \cos 3$.

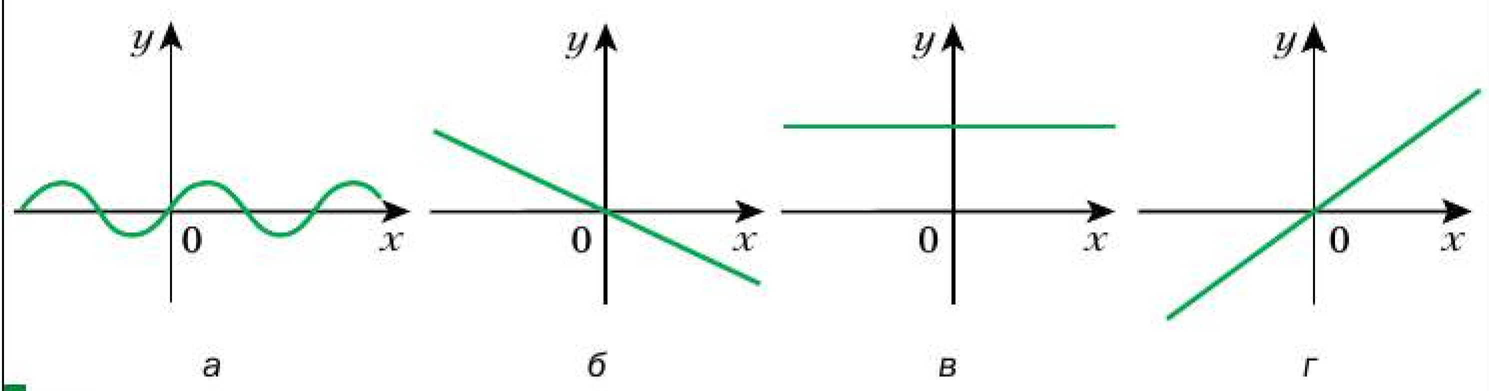


Рис. **9.2**

9.13. Укажите график, изображённый на рисунке 9.3, который может быть графиком первообразной функции $f(x) = \ln 2$.

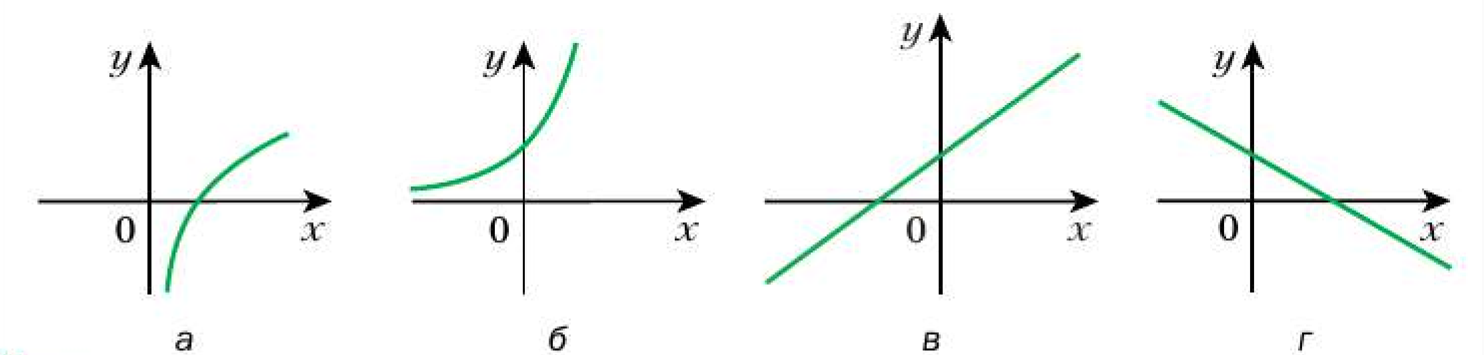


Рис. **9.3**

9.14. Для функции $f(x) = \sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$ найдите какие-нибудь две первообразные, расстояние между соответствующими точками которых (т. е. точками с равными абсциссами) равно 2.

9.15. Докажите, что функции $F_1(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ и $F_2(x) = -\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ являются первообразными функции $f(x) = \cos 2x$. При каком значении C верно равенство $F_1(x) = F_2(x) + C$?

9.16. Докажите, что функции $F_1(x) = \sin^2 x$ и $F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$ являются первообразными функции $f(x) = \sin 2x$. При каком значении C верно равенство $F_2(x) = F_1(x) + C$?

9.17. Найдите $\int x^3 \sin x^4 dx$.

9.18. Найдите $\int e^{\sin x} \cos x\, dx$.

9.19. Определённая на $\boldsymbol{R}$ нечётная функция имеет первообразную. Докажите, что эта первообразная является чётной функцией.

9.20. Определённая на $\boldsymbol{R}$ чётная функция f имеет первообразную. Докажите, что среди первообразных функции f есть нечётная функция.

§ 10 Правила нахождения первообразной

При нахождении производных функций вы пользовались не только формулами производных степенной, тригонометрических и т. д. функций, но и правилами дифференцирования. В этом параграфе мы рассмотрим три правила нахождения первообразных, т. е. три правила интегрирования.

Теорема 10.1

Если функции F и G являются соответственно первообразными функций f и g на промежутке I, то на этом промежутке функция $y = F(x) + G(x)$ является первообразной функции $y = f(x) + g(x)$.

Доказательство

Из условия следует, что для любого $x \in I$ выполняются равенства $F'(x) = f(x)$ и $G'(x) = g(x)$. Тогда для любого x из промежутка I имеем:

$$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x). \blacksquare$$

Из теоремы 10.1 следует, что

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x) + G(x) + C,$$

где C — любое число.

Аналогично можно доказать, что

$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx = F(x) - G(x) + C,$$

где C — любое число.

Теорема 10.2

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, то на этом промежутке функция $y = kF(x)$ является первообразной функции $y = kf(x)$.

Докажите теорему 10.2 самостоятельно.

Теперь можно записать:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx = kF(x) + C, \text{ где } C \text{ — любое число.}$$

Теорема 10.3

Если функция F является первообразной функции f на промежутке I и k — некоторое число, отличное от нуля, то на соответствующем промежутке функция $y = \frac{1}{k}F(kx + b)$ является первообразной функции $y = f(kx + b)$.

Доказательство

Используя правило нахождения производной сложной функции, запишем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}f(kx+b)\cdot k = f(kx+b). \blacksquare$$

Из теоремы 10.3 следует:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C, \text{ где } C \text{ — любое число.}$$

Пример 1. Найдите общий вид первообразных функции $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Решение. Напомним, что функция $y = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ является первообразной функции $y = x^{\alpha}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Поскольку на данном промежутке выполняется равенство $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, то функция $y = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}$, т. е. функция $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$, является первообразной для функции $y = \sqrt{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Поскольку $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$, то функция $y = \frac{x^{-2+1}}{-2+1}$, т. е. функция $y = -\frac{1}{x}$, является первообразной функции $y = \frac{1}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$. Тогда по теореме 10.2 функция $y = -\frac{2}{x}$ является первообразной функции $y = \frac{2}{x^2}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Воспользовавшись теоремой 10.1, получаем, что функция $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x}$ является первообразной функции $f(x)$ на заданном в условии промежутке. Тогда запись $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C$ на промежутке $(0; +\infty)$, где C — любое число, является общим видом первообразных функции f.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C$, где C — любое число. ■

Решение примера 1 можно записать и так:

$$\int\left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx = \int\sqrt{x}dx + \int\frac{2}{x^2}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + 2\int x^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2\cdot\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{2}{x} + C, \text{ где } C \text{ — любое число.}$$

Пример 2. Найдите одну из первообразных функции:

1) $y = \cos(2x+1)$;

2) $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ на промежутке $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Решение. 1) Поскольку функция $F(x) = \sin x$ является первообразной функции $f(x) = \cos x$, то по теореме 10.3 функция $y = \frac{1}{k}F(kx+b)$, т. е. функция $y = \frac{1}{2}\sin(2x+1)$, является первообразной функции $y = \cos(2x+1)$.

2) Поскольку $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$, то первообразной функции $f(x) = \frac{1}{x^3}$ является функция $F(x) = \frac{x^{-3+1}}{-3+1}$, т. е. $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$. Тогда первообразная функции $y = \frac{1}{(5x-3)^3}$ имеет вид $y = \frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2(5x-3)^2}\right)$, т. е. $y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}$.

Ответ: $y = -\frac{1}{10(5x-3)^2}$. ■

Пример 3. Для функции $f(x) = \frac{1}{4x-3}$ найдите первообразную на промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$, график которой проходит через точку $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Решение. Согласно теореме 10.3 запись $\frac{1}{4}\ln|4x-3| + C$, где C — любое число, является общим видом первообразных функции f на данном промежутке.

На промежутке $\left(-\infty; \frac{3}{4}\right)$ искомая первообразная имеет вид $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3-4x) + C$, где C — некоторое число. Из условия следует, что $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Тогда $\frac{1}{4}\ln\left(3 - 4\cdot\frac{1}{2}\right) + C = 2$, отсюда $C = 2$.

Следовательно, $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3 - 4x) + 2$.

Ответ: $F(x) = \frac{1}{4}\ln(3 - 4x) + 2$. ■

Пример 4. Скорость движения материальной точки по координатной прямой изменяется по закону $v(t) = \frac{3}{\sqrt{2t+1}}$. Найдите закон движения $y = s(t)$, если $s(0) = 3$ (перемещение измеряется в метрах, время — в секундах).

Решение. Функция $y = s(t)$ является первообразной функции $y = v(t)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Найдя первообразную функции $y = \frac{3}{\sqrt{2t+1}}$, можно записать:

$$s(t) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2t+1} + C, \text{ т. е. } s(t) = 3\sqrt{2t+1} + C,$$

где C — некоторое число. Найдём C из условия $s(0) = 3$. Имеем:

$$3\sqrt{2 \cdot 0 + 1} + C = 3, \text{ отсюда } C = 0.$$

Тогда искомый закон движения материальной точки задаётся формулой $s(t) = 3\sqrt{2t+1}$. ■

В курсе алгебры и начал математического анализа 10 класса вы узнали, как найти производные произведения функций, частного функций и производную сложной функции. Возможно, после ознакомления с материалом этого параграфа у вас возник вопрос, как найти первообразные функций $y = f(x)g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ или $y = f(g(x))$, если известны первообразные функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. К сожалению, общих правил нахождения первообразных таких функций не существует.

? Сформулируйте три правила нахождения первообразной.

Упражнения

10.1. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = 4 - 2x$;
2) $f(x) = 3x^2 - x + 5$;
3) $f(x) = 5\sin x + \cos x$;
4) $f(x) = x^3(2 - x^2)$;
5) $f(x) = 5e^x - 2 \cdot 3^x$;
6) $f(x) = \frac{6}{x} - x^3$ на промежутке $(-\infty; 0)$;
7) $f(x) = \frac{9}{\sin^2 x} + \frac{x^4}{4}$ на промежутке $(0; \pi)$;

8) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}} + x^3$ на промежутке $(0;\ +\infty)$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$;

10) $f(x) = \sqrt{x} - \dfrac{6}{x^5}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$.

10.2. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = x + 3$;

2) $f(x) = x^2 + 4x - 1$;

3) $f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x^2 + 1}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^x + 2^x \ln 2$;

5) $f(x) = \dfrac{9}{\cos^2 x} - 3\sin x$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$;

6) $f(x) = 5\sqrt[4]{x} - \dfrac{3}{x}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$;

7) $f(x) = 6x^2 - \dfrac{2}{x^2}$ на промежутке $(0;\ +\infty)$;

8) $f(x) = \dfrac{9}{x^{10}} + \dfrac{8}{x^9}$ на промежутке $(-\infty;\ 0)$.

10.3. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin 5x$;

2) $f(x) = 2\cos\dfrac{x}{2}$;

3) $f(x) = \left(6x + \dfrac{1}{2}\right)^3$;

4) $f(x) = \left(\dfrac{x}{7} - 2\right)^4$;

5) $f(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$;

6) $f(x) = 7^{3x}$;

7) $f(x) = -\dfrac{1}{3}\sin\left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 3x}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{6};\ \dfrac{\pi}{6}\right)$;

9) $f(x) = \dfrac{8}{\sin^2 4x}$ на промежутке $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$;

10) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$;

11) $f(x) = \sqrt{x+4}$ на промежутке $[-4;\ +\infty)$;

12) $f(x) = \dfrac{6}{3x+2}$ на промежутке $\left(-\dfrac{2}{3};\ +\infty\right)$;

13) $f(x) = \dfrac{4}{(4x-3)^2}$ на промежутке $\left(-\infty;\ \dfrac{3}{4}\right)$;

14) $f(x) = \sqrt{1-\dfrac{x}{2}}$ на промежутке $(-\infty;\ 2]$.

10.4. Найдите общий вид первообразных функции:

1) $f(x) = \sin\dfrac{x}{4}$;

2) $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right)$;

3) $f(x) = e^{5-\frac{x}{2}}$;

4) $f(x) = \dfrac{1}{2^{3x+5}}$;

5) $f(x) = (2x-3)^5$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)}$ на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{8};\ \dfrac{3\pi}{8}\right)$;

7) $f(x) = \dfrac{3}{(3x-1)^3}$ на промежутке $\left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$;

8) $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ на промежутке $(-\infty;\ 3)$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{5}}$ на промежутке $(0;\ 5\pi)$;

10) $f(x) = \sqrt[4]{4x+7}$ на промежутке $\left(-\dfrac{7}{4};\ +\infty\right)$.

10.5. Для функции f на промежутке I найдите первообразную F, удовлетворяющую данному условию:

1) $f(x) = 1 - 2x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(3) = 2$;

2) $f(x) = 3x^2 - 4x$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(1) = 4$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F(\pi) = 7$;

4) $f(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right)$, $I = (-\infty;\ +\infty)$, $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$;

5) $f(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$, $I = (0; +\infty)$, $F\left(\frac{1}{4}\right) = 1$;

6) $f(x) = \frac{7}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $I = (4; +\infty)$, $F(5) = 6$;

7) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6x+1}}$, $I = \left(-\frac{1}{6}; +\infty\right)$, $F(4) = 7$;

8) $f(x) = e^{3x}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(0) = 1$;

9) $f(x) = (2 - 3x)^2$, $I = (-\infty; +\infty)$, $F(1) = 0$;

10) $f(x) = \frac{4}{\cos^2\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)}$, $I = \left(-\frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{9}\right)$, $F(0) = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

10.6. Для функции f на промежутке I найдите первообразную F, график которой проходит через данную точку:

1) $f(x) = 3 - 6x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $A(-1; 0)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $I = (-\infty; +\infty)$, $B(1; 5)$;

3) $f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x}}$, $I = (0; +\infty)$, $C(4; 10)$;

4) $f(x) = 2\sin 3x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $D\left(\frac{\pi}{3}; 0\right)$;

5) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\frac{x}{2} - 2}}$, $I = (4; +\infty)$, $E(6; 12)$;

6) $f(x) = e^{2x+1}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$;

7) $f(x) = \frac{1}{4x - 3e^2}$, $I = \left(\frac{3e^2}{4}; +\infty\right)$, $K(e^2; 6)$;

8) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{8}}$, $I = (0; 8\pi)$, $N(2\pi; -3)$.

10.7. Для функции $f(x) = 4x^3 + 4x$ найдите первообразную F, один из нулей которой равен -1. Найдите остальные нули этой первообразной.

10.8. Для функции $f(x) = x^2 - 12$ найдите первообразную F, один из нулей которой равен 3.

10.9. Функции F_1 и F_2 являются первообразными функции f на промежутке $(-\infty; +\infty)$. График функции F_1 проходит через точку A, а функции F_2 — через точку B. График какой из функций, F_1 или F_2, расположен выше, если:

1) $f(x) = 5x^4 - 3x^2 - 2$, $A(1; 2)$, $B(0; 5)$;

2) $f(x) = (2x - 1)^2$, $A(2; 6)$, $B(-1; 1)$?

10.10. Функции F_1 и F_2 являются первообразными функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5x-1}}$ на промежутке $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$. График функции F_1 проходит через точку $M(1; 9)$, а функции F_2 — через точку $N(10; 8)$. График какой из функций, F_1 или F_2, расположен выше?

10.11. Скорость материальной точки, которая двигается по координатной прямой, изменяется по закону $v(t) = t^2 + 2t - 3$. Запишите формулу зависимости её координаты от времени, если в начальный момент времени $t = 0$ с точка находилась в начале координат (скорость движения измеряется в метрах в секунду).

10.12. Тело двигается по координатной прямой со скоростью, которая определяется в любой момент времени t по формуле $v(t) = 6t^2 + 1$. Найдите формулу, которая выражает зависимость координаты точки от времени, если в момент времени $t = 3$ с тело находилось на расстоянии 10 м от начала координат (скорость движения измеряется в метрах в секунду).

10.13. Задайте формулой функцию, определённую на промежутке $(-\infty; +\infty)$, график которой проходит через точку $A(-1; 6)$, если угловой коэффициент касательной, проведённой к этому графику в точке с абсциссой x, равен $6x^2 - 5x^4$.

10.14. Задайте формулой функцию, определённую на промежутке $(0; +\infty)$, график которой проходит через точку $B(4; -5)$, если угловой коэффициент касательной, проведённой к этому графику в точке с абсциссой x, равен $\frac{3}{\sqrt{x}} + 1$.

◆ ◆ ◆

10.15. Найдите:

1) $\int \sin^2 x dx$; 2) $\int \sin 5x \cos 3x dx$; 3) $\int \sin \frac{7x}{3} \sin \frac{5x}{3} dx$.

10.16. Найдите:

1) $\int \cos^2 2x dx$; 2) $\int \cos x \cos 8x dx$.

10.17. Для функции $f(x) = 2x^2 + 3x$ найдите такую первообразную, что прямая $y = 5x - 2$ является касательной к её графику.

10.18. Для функции $f(x) = x^2 - 4$ найдите такую первообразную, что прямая $y = -3$ является касательной к её графику.

10.19. Для функции $f(x) = -2x + 5$ найдите такую первообразную, что её график имеет только одну общую точку с прямой $y = 2$.

10.20. Для функции $f(x) = x + 1$ найдите такую первообразную, что её график имеет только одну общую точку с прямой $y = -4$.

10.21. Учащийся ищет первообразную функции $y = \cos x^2$ так:

1) делает замену $x^2 = t$ и получает функцию $y = \cos t$;

2) далее ищет первообразную функции $y = \cos t$ и получает $y = \sin t$;

3) потом вместо t подставляет значение $t = x^2$ и делает вывод, что каждая первообразная имеет вид $y = \sin x^2 + C$, где C — некоторое число.

В чём состоит ошибка этого учащегося?

§ 11 Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл

Рассмотрим функцию f, которая непрерывна на промежутке $[a; b]$ и принимает на нём неотрицательные значения. Фигуру, ограниченную графиком функции f и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$, называют **криволинейной трапецией**.

На рисунке 11.1 приведены примеры криволинейных трапеций (они выделены жёлтым цветом).

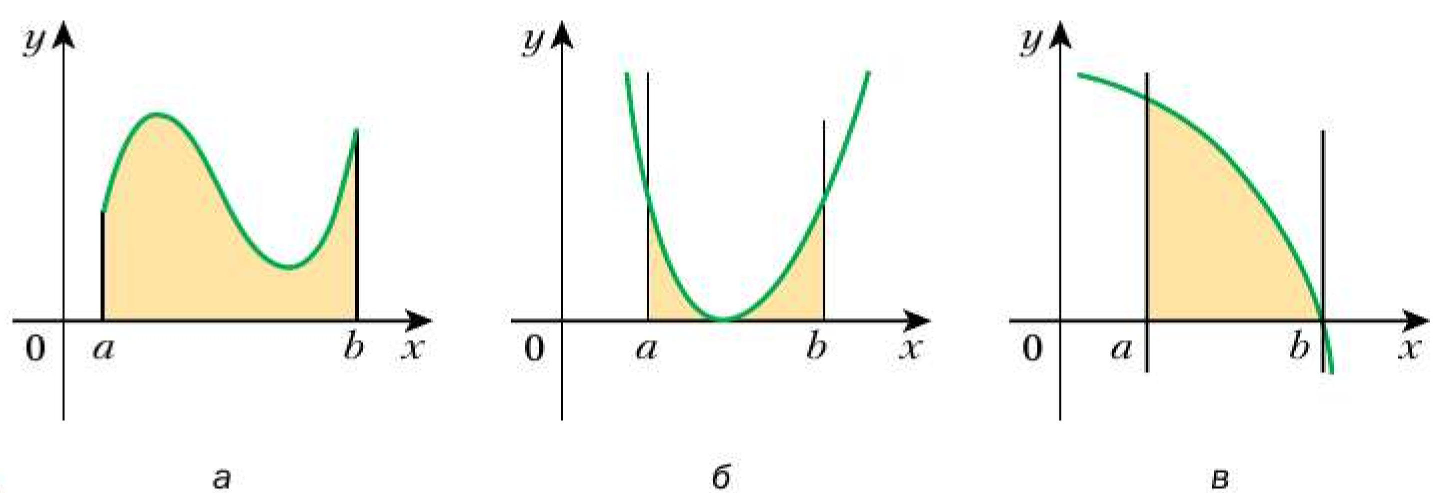


Рис. 11.1

Рассмотрим теорему, которая позволяет вычислять площади криволинейных трапеций.

Теорема 11.1

Площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, можно вычислить по формуле

$$S = F(b) - F(a),$$

где F — любая первообразная функции f на отрезке $[a; b]$.

Доказательство

Рассмотрим функцию $y = S(x)$, где $x \in [a; b]$, которая определена таким правилом: если $x = a$, то $S(a) = 0$, если $x \in (a; b]$, то $S(x)$ — это площадь криволинейной трапеции, показанной на рисунке 11.2 жёлтым цветом.

Докажем, что $S'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a; b]$.

Пусть x_0 — произвольная точка промежутка $[a; b]$ и Δx — приращение аргумента в точке x_0. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\Delta x > 0$ (случай, когда $\Delta x < 0$, рассматривают аналогично).

Имеем: $\Delta S = S(x_0 + \Delta x) - S(x_0)$.

Получаем, что ΔS — это площадь криволинейной трапеции, показанной на рисунке 11.3 жёлтым цветом.

На отрезке AB как на стороне построим прямоугольник, площадь которого равна ΔS (рис. 11.4). Длины сторон этого прямоугольника равны Δx и $f(t)$, где t — некоторая точка промежутка $[x_0; x_0 + \Delta x]$. Тогда $\Delta S = f(t) \cdot \Delta x$. Отсюда $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(t)$.

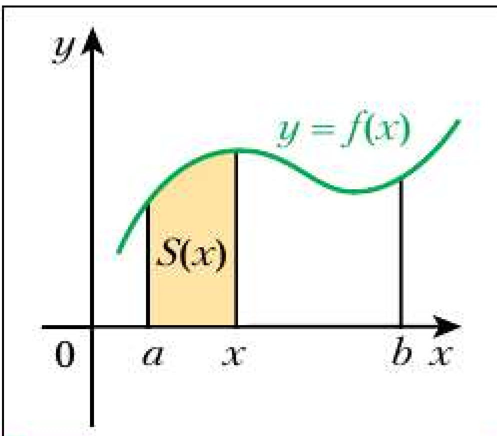


Рис. 11.2

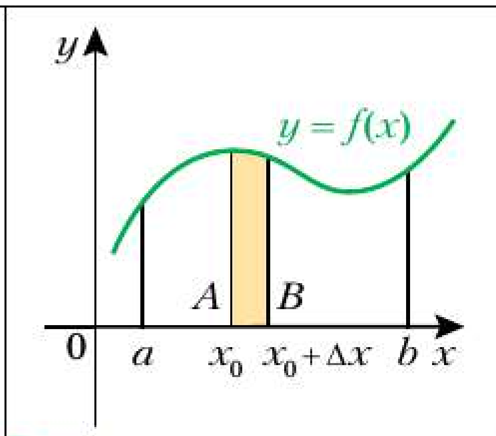


Рис. 11.3

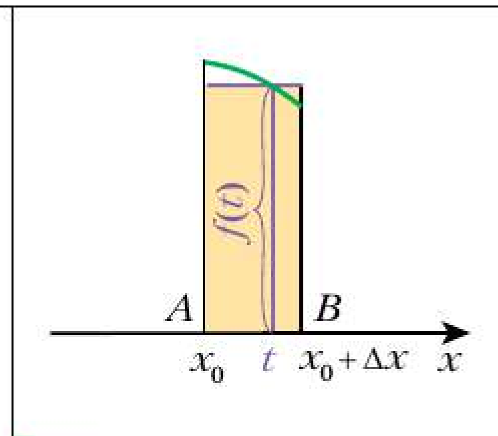


Рис. 11.4

Если $\Delta x \to 0$, то $t \to x_0$. Поскольку функция f непрерывна в точке x_0, то $\lim\limits_{t \to x_0} f(t) = f(x_0)$. Отсюда, если $\Delta x \to 0$, то $f(t) \to f(x_0)$. Имеем:

$$S'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(t) = f(x_0).$$

Поскольку x_0 — произвольная точка области определения функции $y = S(x)$, то для любого $x \in [a; b]$ выполняется равенство $S'(x) = f(x)$.

Получили, что функция $y = S(x)$ является одной из первообразных функции f на промежутке $[a; b]$.

Пусть F — некоторая первообразная функции f на промежутке $[a; b]$. Тогда по основному свойству первообразной можно записать:

$$F(x) = S(x) + C,$$

где C — некоторое число.

Имеем: $F(b) - F(a) = (S(b) + C) - (S(a) + C) = S(b) - S(a) = S(b)$.

По определению функции $y = S(x)$ искомая площадь S криволинейной трапеции равна $S(b)$. Следовательно,

$$S = F(b) - F(a).$$ ■

Пример 1. Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = \sin x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

Решение. На рисунке 11.5 изображена криволинейная трапеция, площадь которой требуется найти.

Одной из первообразных функции $f(x) = \sin x$ на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$ является функция $F(x) = -\cos x$. Тогда $S = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$. ■

Пример 2. Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $f(x) = 4x - x^2$ и прямой $y = 0$.

Решение. График функции f пересекает прямую $y = 0$ в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$ (рис. 11.6). Тогда фигура, площадь которой требуется найти, является криволинейной трапецией, ограниченной графиком функции f и прямыми $y = 0$, $x = 0$ и $x = 4$.

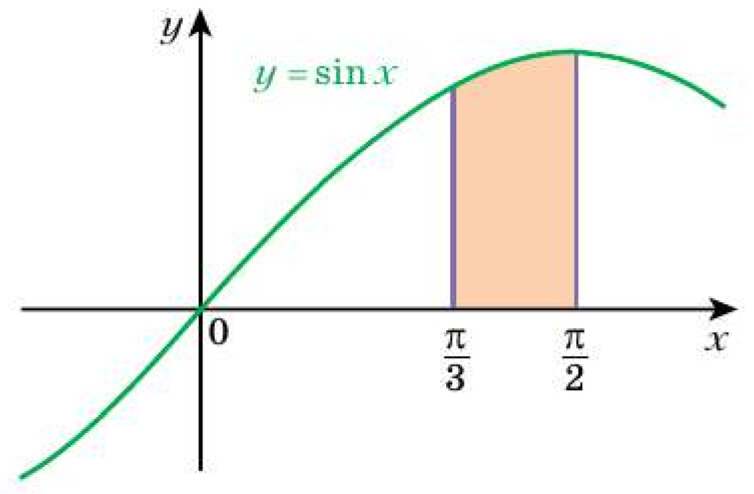


Рис. 11.5

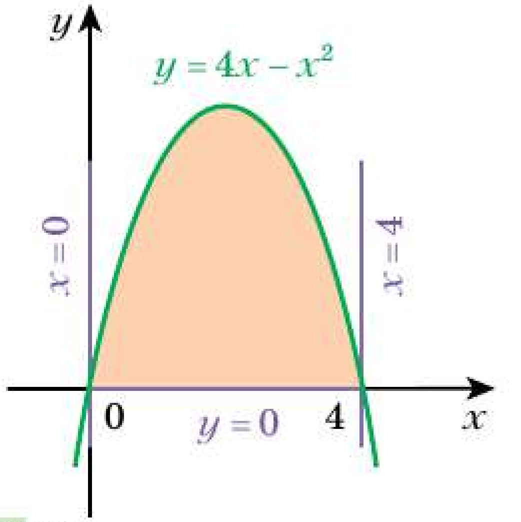


Рис. 11.6

Одной из первообразных функции f на промежутке $[0; 4]$ является функция $F(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}$. Тогда

$$S = F(4) - F(0) = 2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3} = \frac{32}{3}.$$

Ответ: $\frac{32}{3}$. ■

Определение

Пусть F — первообразная функции f на промежутке I, числа a и b, где $a < b$, принадлежат промежутку I. Разность $F(b) - F(a)$ называют определённым интегралом[1] функции f на отрезке $[a; b]$.

Определённый интеграл функции f на промежутке $[a; b]$ обозначают так: $\int\limits_a^b f(x)dx$ (читают: «интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс»). Таким образом,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),} \qquad (1)$$

где F — произвольная первообразная функции f на промежутке I.

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной функции $f(x) = 3x^2$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$. Тогда для произвольных чисел a и b, где $a < b$, можно записать:

$$\int\limits_a^b 3x^2dx = F(b) - F(a) = b^3 - a^3.$$

Заметим, что значение разности $F(b) - F(a)$ не зависит от того, какую из первообразных функции f выбрали. Действительно, каждую первообразную G функции f на промежутке I можно представить в виде $G(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Тогда

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a).$$

Равенство (1) называют **формулой Ньютона — Лейбница**.

Таким образом, для вычисления определённого интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ по формуле Ньютона — Лейбница надо:

1) найти любую первообразную F функции f на промежутке $[a; b]$;
2) вычислить значение первообразной F в точках $x = b$ и $x = a$;
3) найти разность $F(b) - F(a)$.

При вычислении определённого интеграла разность $F(b) - F(a)$ обозначают $F(x)\Big|_a^b$.

Используя такое обозначение, вычислим, например, $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx$. Имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2}.$$

---

[1] Данное определение интеграла охватывает класс функций, имеющих первообразную на отрезке $[a; b]$. Существуют и другие способы ввести понятие «определённый интеграл» для других классов функций. С такими подходами вы ознакомитесь, изучая математику в университете.

Пример 3. Вычислите $\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx$.

Решение. Имеем:

$$\int_1^2 (x^4 + x^2 - 2)dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2x\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} - 2 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^5}{5} + \frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1\right) = \frac{98}{15}. \blacksquare$$

Ответ: $\frac{98}{15}$. ■

Если функция f имеет первообразную F на промежутке $[a; b]$ и $c \in (a; b)$, то из формулы Ньютона — Лейбница следует такое свойство определённого интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Действительно,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \left(F(b) - F(c)\right) + \left(F(c) - F(a)\right) = \int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx.$$

Если каждая из функций f и g имеет первообразную на промежутке $[a; b]$, то, используя теоремы 10.1 и 10.2, можно доказать (сделайте это самостоятельно) такие свойства определённого интеграла:

1) $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$

2) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$, **где k — некоторое число**

Формула Ньютона — Лейбница позволяет установить связь между определённым интегралом и площадью S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$.

Используя теорему 11.1, можно записать:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Заметим, что в этой формуле рассматриваются непрерывные функции f, которые на промежутке $[a; b]$ принимают только неотрицательные значения. Однако определённый интеграл можно использовать для вычисления площадей более сложных фигур.

Рассмотрим непрерывные на промежутке $[a; b]$ функции f и g такие, что для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$.

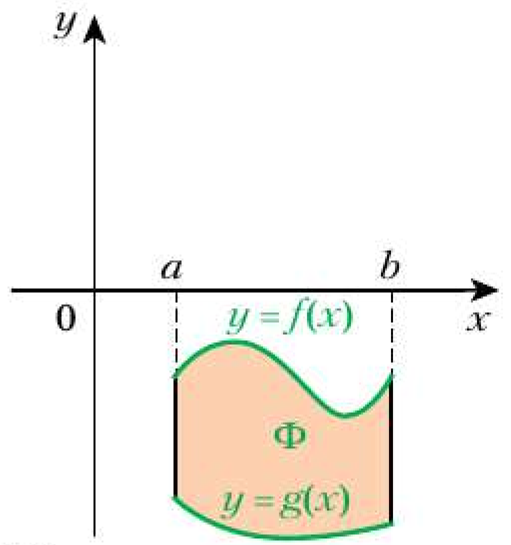


Рис. 11.7

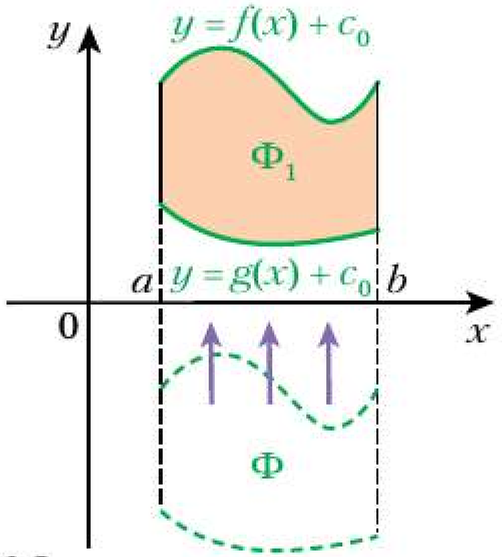


Рис. 11.8

Покажем, как найти площадь S фигуры Ф, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.7).

Перенесём фигуру Ф вверх на c_0 единиц так, чтобы полученная фигура $Ф_1$ находилась выше оси абсцисс (рис. 11.8). Фигура $Ф_1$ ограничена графиками функций $y = f(x) + c_0$ и $y = g(x) + c_0$ и прямыми $x = a$, $x = b$.

Поскольку фигуры Ф и $Ф_1$ имеют равные площади, то искомая площадь S равна разности $S_f - S_g$, где:

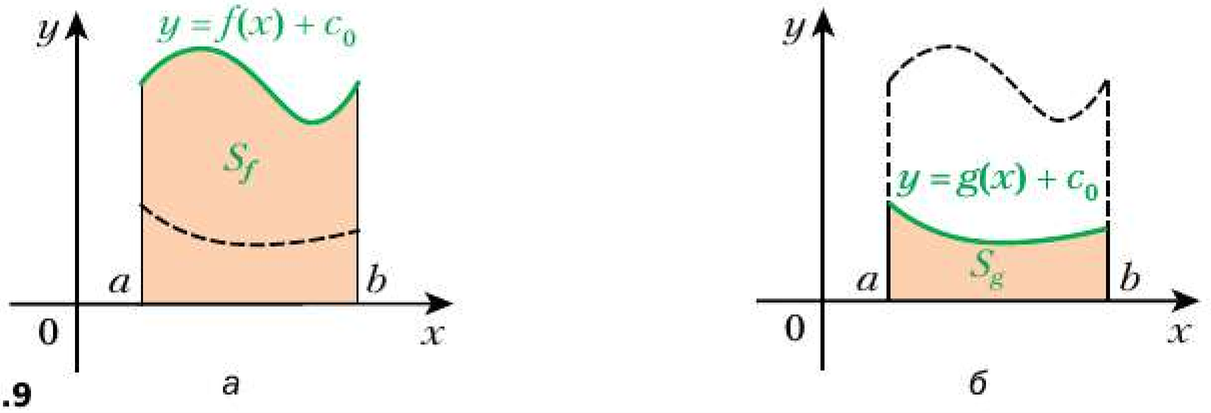


Рис. 11.9

S_f — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x) + c_0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.9, *а*);

S_g — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = g(x) + c_0$ и прямыми $y = 0$, $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.9, *б*).

Таким образом, используя свойства определённого интеграла, можем записать:

$$S = S_f - S_g = \int_a^b (f(x) + c_0)dx - \int_a^b (g(x) + c_0)dx =$$

$$= \int_a^b \left(\left(f(x) + c_0\right) - \left(g(x) + c_0\right)\right)dx = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx.$$

Следовательно, *если функции f и g непрерывны на промежутке $[a; b]$ и для всех $x \in [a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant g(x)$, то площадь S фигуры, ограниченной графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно вычислить по формуле*

$$\boldsymbol{S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx}$$

Пример 4. Найдите площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ и $g(x) = x^2 - 2x$.

Решение. На рисунке 11.10 изображена фигура, площадь которой надо найти.

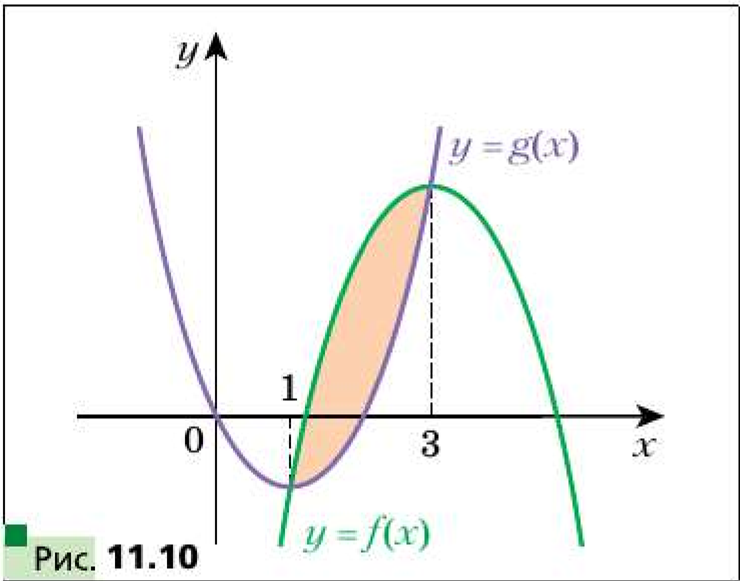


Рис. **11.10**

Решив уравнение $f(x) = g(x)$, устанавливаем, что графики функций f и g пересекаются в двух точках с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$.

Тогда искомая площадь

$$S = \int_1^3 (f(x) - g(x))dx = \int_1^3 (-2x^2 + 8x - 6)dx = \left(-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3\right) - \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 4 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1\right) = \frac{8}{3}.$$

Ответ: $\frac{8}{3}$. ■

?

1. Опишите, какую фигуру называют криволинейной трапецией.
2. Сформулируйте теорему о площади криволинейной трапеции.
3. Что называют определённым интегралом функции f на отрезке $[a; b]$?
4. Какое равенство называют формулой Ньютона — Лейбница?
5. Сформулируйте свойства определённого интеграла.

Упражнения

11.1. Найдите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 11.11.

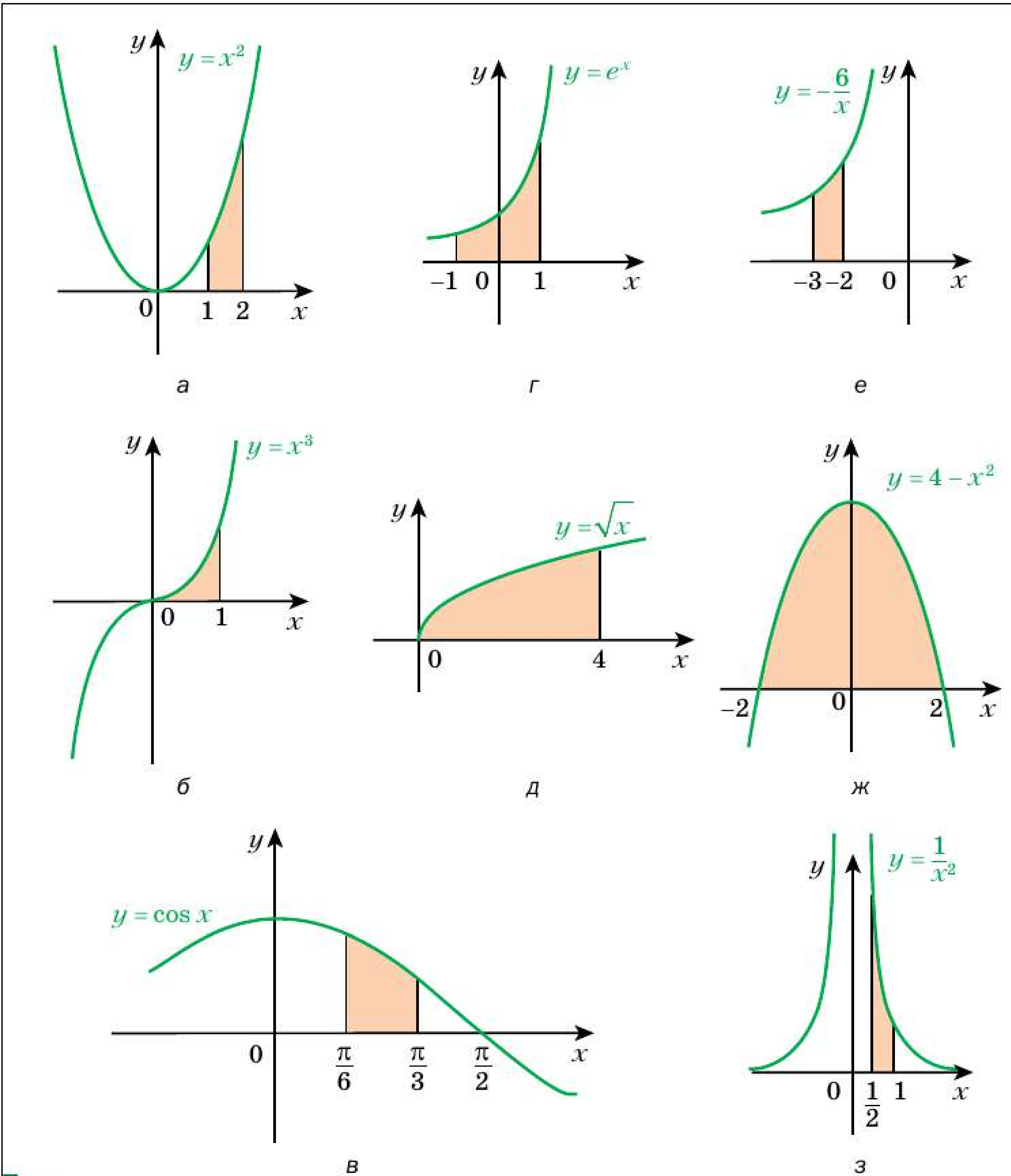


Рис. 11.11

11.2. Найдите площадь криволинейной трапеции, изображённой на рисунке 11.12.

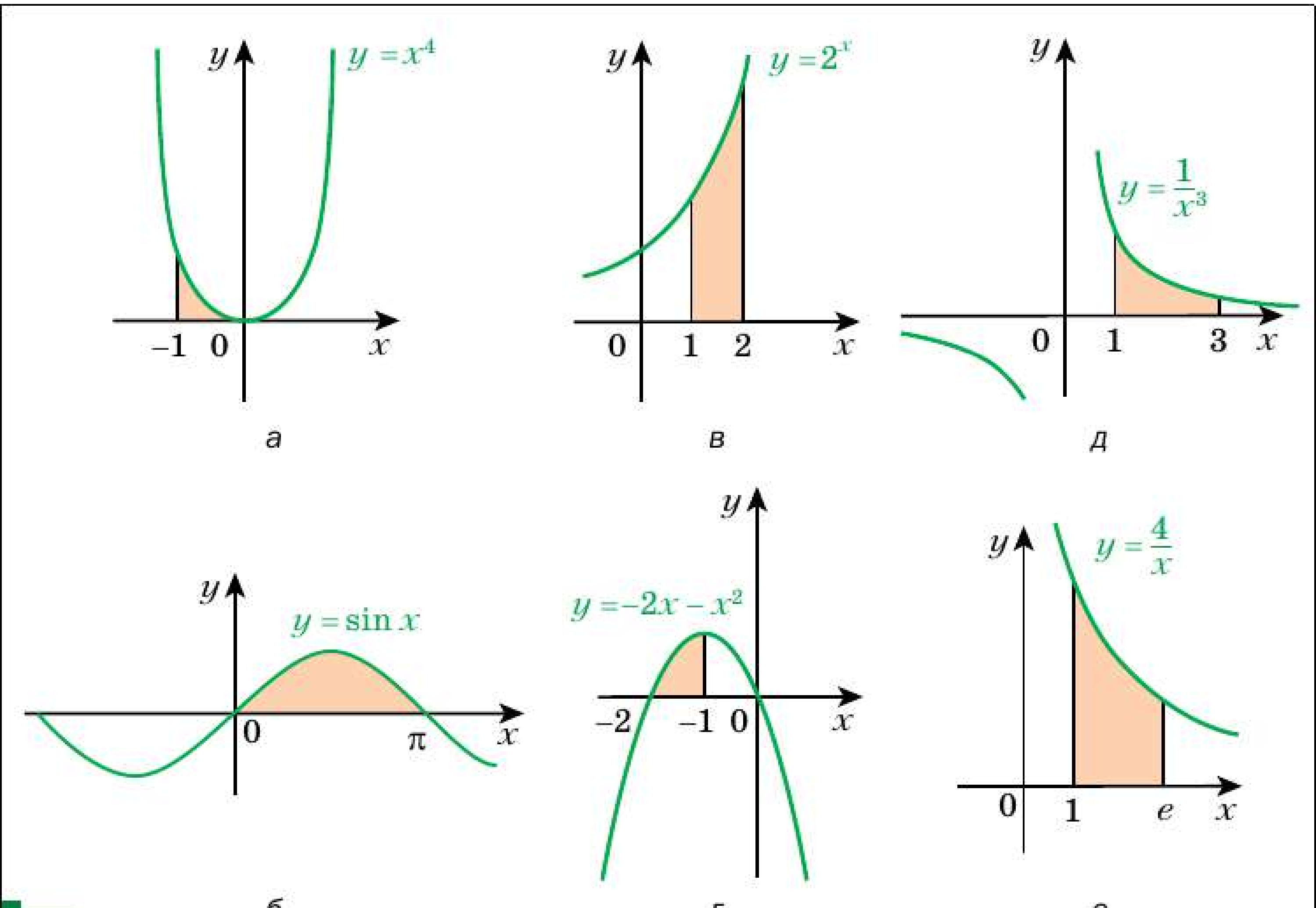


Рис. **11.12**

11.3. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int_5^7 x\,dx$;

2) $\int_3^8 dx$;

3) $\int_{-3}^0 x^2\,dx$;

4) $\int_{-1}^2 x^4\,dx$;

5) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx$;

6) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

7) $\int_{16}^{100} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

8) $\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x}$;

9) $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$;

10) $\int_{-2}^3 3^x\,dx$;

11) $\int_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx$;

12) $\int_{-4}^{-2} (2x+4)\,dx$;

13) $\int_0^6 (3x^2 - x)\,dx$;

14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\sin x + 2\cos x)\,dx$.

11.4. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_{-4}^{-2} 2\,dx$;

2) $\int\limits_{1}^{2} x^3\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$;

4) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

5) $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^4}$;

6) $\int\limits_{0}^{4} e^x\,dx$;

7) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x}$;

8) $\int\limits_{4}^{9} \sqrt{x}\,dx$;

9) $\int\limits_{-1}^{1} (1-5x^4)\,dx$.

11.5. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной:

1) параболой $y = x^2 + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) косинусоидой $y = \cos x$ и прямыми $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

3) графиком функции $y = -x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$;

4) параболой $y = 3 - 2x - x^2$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

5) гиперболой $y = \frac{1}{2x}$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 2$;

6) параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс;

7) синусоидой $y = \sin 2x$ и прямыми $y = 0$, $x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{\pi}{4}$;

8) графиком функции $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 0$;

9) графиком функции $y = e^x + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 0$, $x = -2$;

10) графиком функции $y = \sqrt{5-x}$ и прямыми $y = 0$, $x = -4$.

11.6. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 1$, $y = 0$, $x = 2$;

2) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$;

3) $y = -\frac{8}{x}$, $y = 0$, $x = -4$, $x = -2$;

4) $y = \frac{1}{(x+2)^2}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$;

5) $y = \sqrt{x+4}$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 5$;

6) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1$, $y = 0$, $x = -2$, $x = -4$.

11.7. Докажите, что криволинейные трапеции, закрашенные на рисунке 11.13, равновелики.

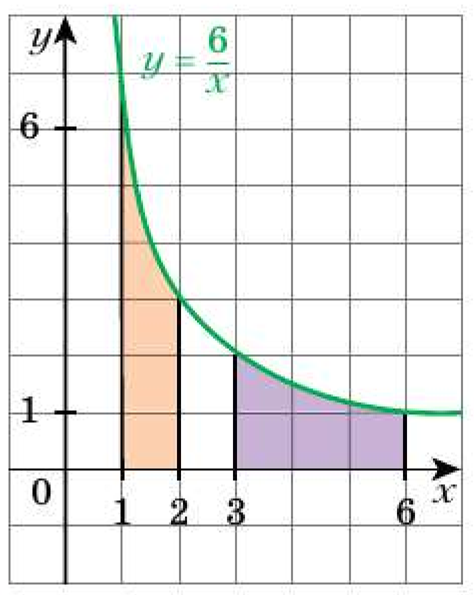


Рис. **11.13**

11.8. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^3 (4x^3 - 4x + 3)\,dx$;

2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$;

3) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{\sin^2 2x}$;

4) $\int\limits_{-2}^{1} (x-3)^2\,dx$;

5) $\int\limits_{\frac{1}{5}}^{1} (5x-3)^5\,dx$;

6) $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt{3x-2}}$;

7) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{3-2x}$;

8) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\sin\frac{x}{6} + \cos 5x\right)dx$;

9) $\int\limits_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)dx$;

10) $\int\limits_{-6}^{0} e^{-\frac{x}{6}}\,dx$;

11) $\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(4x+1)^3}$;

12) $\int\limits_{12}^{116} \sqrt[3]{\frac{x}{4} - 2}\,dx$.

11.9. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_1^4 \left(\frac{4}{x^2} + 2x - 3x^2\right)dx$;

2) $\int\limits_{\frac{4\pi}{3}}^{4\pi} \sin\frac{x}{4}\,dx$;

3) $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$;

4) $\int\limits_0^1 (2x-1)^4\,dx$;

5) $\int\limits_4^7 \frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$;

6) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 4} e^{-2x}\,dx$;

7) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{3x+1}$;

8) $\int\limits_1^{\frac{7}{6}} \frac{dx}{(6x-5)^2}$;

9) $\int\limits_1^4 \sqrt{7x-3}\,dx$.

11.10. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2$, $y = 4$;

2) $y = 2x^2$, $y = 2x$;

3) $y = e^x$, $y = 1$, $x = 2$;

4) $y = \frac{4}{x}$, $y = 1$, $x = 1$;

5) $y = \frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$;

6) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$;

7) $y = 2 + x - x^2$, $y = 2 - x$;

8) $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$;

9) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;

10) $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2$;

11) $y = x^3$, $y = x^2$;

12) $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$;

13) $y = \frac{7}{x}$, $x + y = 8$;

14) $y = \frac{2}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 2$;

15) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

11.11. Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = x^3$ и прямыми $y = 8$, $x = 1$;

2) параболой $y = 0{,}5x^2$ и прямой $y = -x$;

3) параболой $y = 4 - x^2$ и прямой $y = 3$;

4) параболой $y = 6 + x - x^2$ и прямой $y = 6 - 2x$;

5) параболами $y = x^2 - 4x + 4$ и $y = 4 - x^2$;

6) гиперболой $y = \frac{3}{x}$ и прямыми $y = 3$, $x = 3$;

7) графиком функции $y = e^{-x}$ и прямыми $y = e$, $x = 0$;

8) гиперболой $y = \frac{5}{x}$ и прямой $x + y = 6$.

◆ ◆ ◆

11.12. При каком положительном значении a определённый интеграл $\int\limits_0^a (6 - 2x)\,dx$ принимает наибольшее значение?

11.13. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0$ и $x = a$, равна 9?

11.14. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^3$, $y = 0$ и $x = a$, равна 8?

11.15. При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = \frac{2}{x}$ и прямыми $y = 0$, $x = 3$, $x = 12$, на две равновеликие фигуры?

11.16. При каком значении a прямая $x = a$ разбивает фигуру, ограниченную графиком функции $y = -x^3$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, на две равновеликие фигуры?

11.17. При каких значениях a выполняется неравенство:

1) $\int\limits_0^a (4 - 2x)\,dx < 3$, где $a > 0$;

2) $\int\limits_{\log_{0,2} 6}^{a} 0{,}2^x\,dx > \frac{19}{\ln 0{,}2}$, где $a > \log_{0,2} 6$?

11.18. При каких значениях a выполняется неравенство $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{a}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)dx > 1{,}5$, где $a > \frac{1}{2}$?

11.19. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} \mathrm{tg}^2 3x\,dx$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\pi}^{0} 2\sin^2 \frac{x}{4}\,dx$;

4) $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^x + x^3}{x^3 e^x}\,dx$.

11.20. Вычислите определённый интеграл:

1) $\int\limits_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{15\pi}{4}} \mathrm{ctg}^2 \frac{x}{5}\,dx$;

3) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin 7x \cos 3x\,dx$;

2) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2x\,dx$;

4) $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{x^2 - e^x}{x^2 e^x}\,dx$.

11.21. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$;

2) $y = -x^2$, $y = x - 2$;

3) $y = x^2 - 4$, $y = 4 - x^2$;

4) $y = x^2 - 2x$, $y = x$;

5) $y = 3\sin x$, $y = -2\sin x$, $x = 0$, $x = \frac{2\pi}{3}$;

6) $y = \frac{4}{x} - 2$, $y = 2$, $x = 2$, $x = 4$.

11.22. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2 - 4x$, $y = x - 4$;

2) $y = 3 - x^2$, $y = 2x$;

3) $y = \cos x$, $y = -2\cos x$, $x = -\frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$;

4) $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

11.23. Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \begin{cases} 2 - x^2, \text{ если } x < 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x \geqslant 1 \end{cases}$ и прямыми $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$;

2) графиком функции $y = \begin{cases} \cos x, \text{ если } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, \text{ если } 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$ и прямой $y = 0$.

11.24. Найдите площадь фигуры, ограниченной:

1) графиком функции $y = \begin{cases} x+3, \text{ если } x < -1, \\ x^2+1, \text{ если } x \geqslant -1 \end{cases}$ и прямыми $y = 0$, $x = -2$, $x = 0$;

2) графиком функции $y = \begin{cases} x+2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ 2\cos 2x, \text{ если } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$ и прямой $y = 0$.

11.25. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$, прямой, которая касается этой параболы в точке с абсциссой $x_0 = 2$, и осями координат.

11.26. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = 2x^3$ и прямой, которая касается этого графика в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

11.27. Вычислите определённый интеграл, используя его геометрический смысл:

1) $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{4}^{8} \sqrt{8x-x^2}\,dx$;
4) $\int\limits_{-5}^{1} \sqrt{5-4x-x^2}\,dx$;
5) $\int\limits_{-4}^{1} |x|\,dx$;
6) $\int\limits_{0}^{5} |x-2|\,dx$.

11.28. Вычислите определённый интеграл, используя его геометрический смысл:

1) $\int\limits_{-5}^{5} \sqrt{25-x^2}\,dx$;
2) $\int\limits_{0}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$;
3) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{6x-x^2-5}\,dx$;
4) $\int\limits_{-2}^{2} |x+1|\,dx$.

11.29. Найдите $\int\limits_{-2}^{2} \dfrac{2^{\sqrt[3]{x}}-1}{2^{\sqrt[3]{x}}+1}\,dx$.

11.30. Найдите $\int\limits_{-1}^{1} \ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)dx$.

11.31. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_{1}^{e} \ln x\,dx$.

11.32. Вычислите определённый интеграл $\int\limits_{0}^{1} \arcsin x\,dx$.

11.33. Найдите одну из первообразных функции $y = \sqrt{4 - x^2}$ на промежутке $[-2; 2]$.

§ 12 Вычисление объёмов тел

В предыдущем параграфе вы узнали, как с помощью интегрирования можно вычислять площадь криволинейной трапеции. Напомним, что если фигура ограничена графиками функций f и g и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 12.1), то её площадь можно вычислить по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Рассмотрим функцию $l(x) = f(x) - g(x)$. Величина $l(x_0) = f(x_0) - g(x_0)$ равна длине отрезка, по которому вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает данную фигуру (рис. 12.2). Следовательно, можно записать:

$$S = \int_a^b l(x)dx.$$

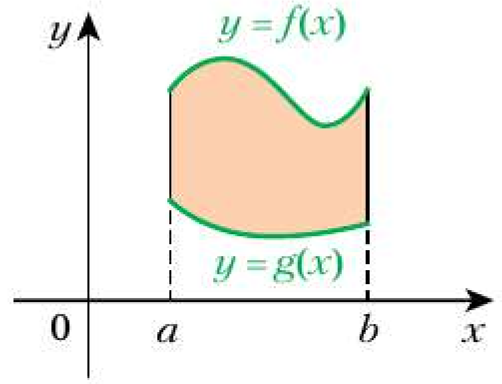


Рис. 12.1

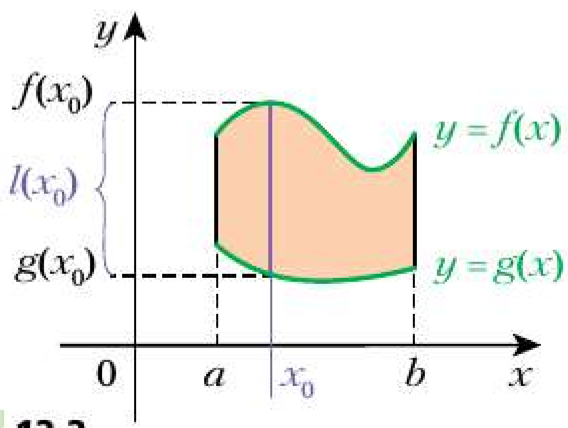


Рис. 12.2

Оказывается, последнюю формулу можно обобщить для решения задач на вычисление объёмов пространственных тел.

В пространственной прямоугольной системе координат рассмотрим тело Ф, объём которого равен V. Пусть сечением тела Ф плоскостью $x = x_0$ является фигура площадью $S(x_0)$, а проекцией тела Ф на ось абсцисс является промежуток $[a; b]$ (рис. 12.3). Если $y = S(x)$ — непрерывная на промежутке $[a; b]$ функция, то объём тела Ф можно вычислить по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{V = \int_a^b S(x)dx}}$$

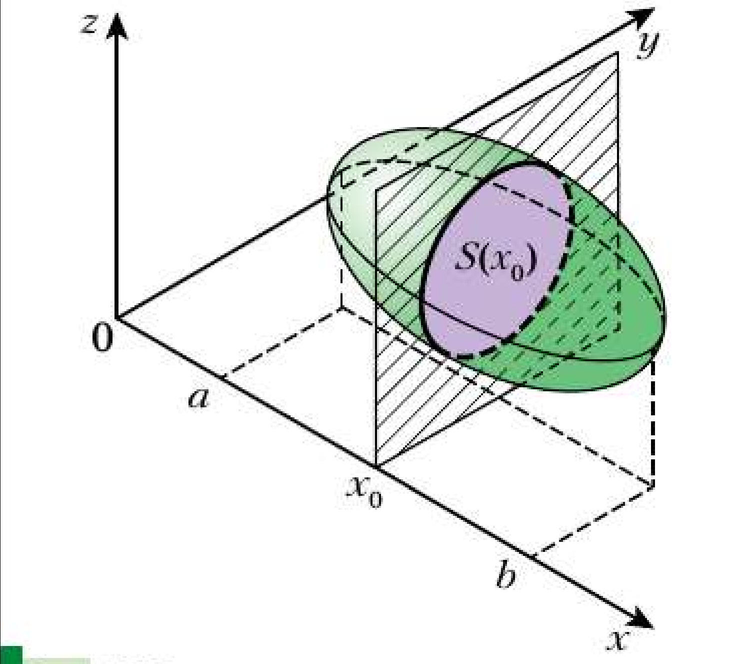


Рис. **12.3**

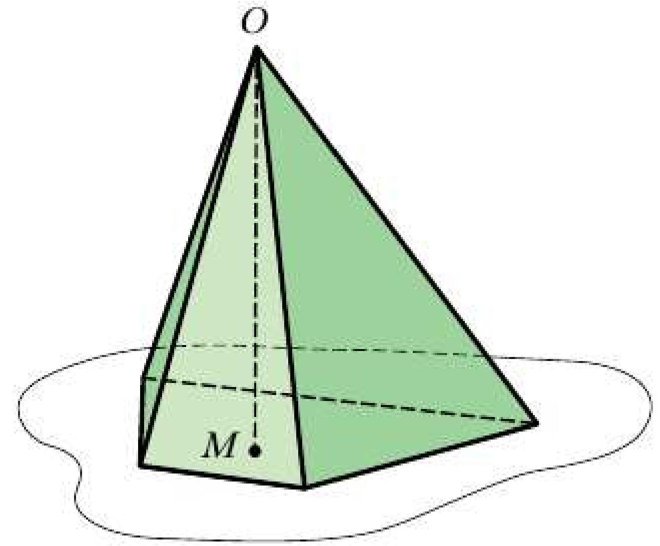


Рис. **12.4**

Эту формулу можно доказать, используя идею доказательства теоремы 11.1.

Покажем, как с помощью этой формулы вывести формулу объёма пирамиды.

Пусть дана пирамида с высотой OM, равной h, и основанием, площадь которого равна S (рис. 12.4). Докажем, что объём пирамиды равен $V = \frac{1}{3}Sh$. Введём систему координат так, чтобы вершина пирамиды O совпала с началом координат, а высота пирамиды OM принадлежала положительной полуоси абсцисс (рис. 12.5). Тогда основание пирамиды лежит в плоскости $x = h$. Поэтому проекцией пирамиды на ось абсцисс является промежуток $[0; h]$.

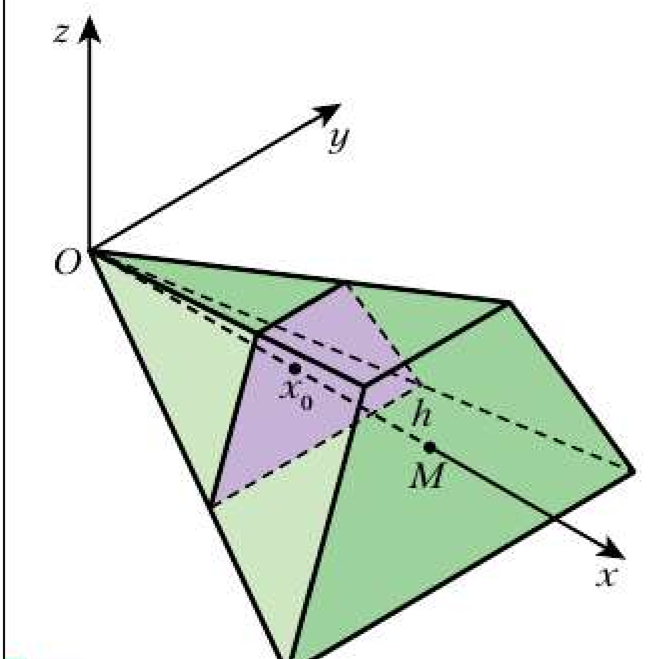


Рис. **12.5**

Пусть сечение пирамиды плоскостью $x = x_0$ — это многоугольник площадью $S(x_0)$. Плоскость этого сечения параллельна плоскости основания пирамиды. Поэтому многоугольник, образованный в сечении, подобен основанию пирамиды. При этом коэффициент подобия равен $\frac{x_0}{h}$. Воспользовавшись теоремой об отношении площадей подобных фигур, получаем пропорцию

$$\frac{S(x_0)}{S} = \frac{x_0^2}{h^2}.$$

Отсюда $S(x_0) = \frac{x_0^2}{h^2}S$. Теперь можно записать:

$$V = \int_0^h S(x)dx = \int_0^h \frac{x^2}{h^2}Sdx = \frac{S}{h^2}\int_0^h x^2dx = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{S}{h^2}\cdot\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}Sh.$$

Пример. Фигура, ограниченная графиком функции $f(x) = x^2 + 1$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ (рис. 12.6), вращается вокруг оси абсцисс, образуя тело объёма V (рис. 12.7). Найдите V.

Решение. При пересечении образовавшегося тела плоскостью $x = x_0$, где $x_0 \in [0; 1]$, получаем круг (рис. 12.8), радиус которого равен $f(x_0)$. Тогда площадь этого круга равна

$$S(x_0) = \pi f^2(x_0) = \pi(x_0^2 + 1)^2 = \pi(x_0^4 + 2x_0^2 + 1).$$

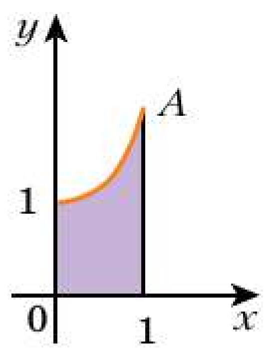


Рис. 12.6

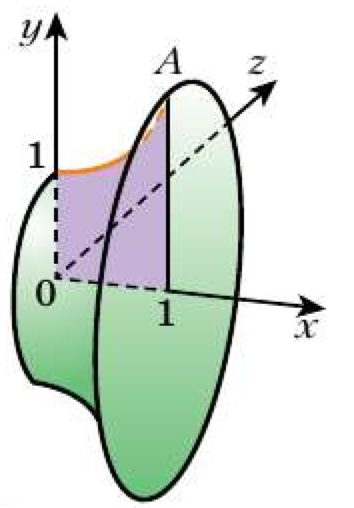


Рис. 12.7

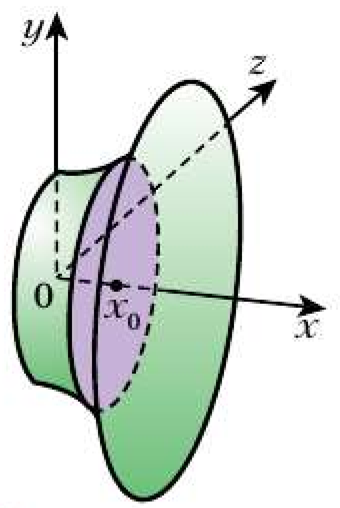


Рис. 12.8

Поэтому

$$V = \int_0^1 S(x)dx = \int_0^1 \pi(x^4 + 2x^2 + 1)dx = \pi\left(\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{28\pi}{15}.$$

Ответ: $\frac{28\pi}{15}$ ■

Вообще, имеет место такое утверждение.

Если при вращении фигуры, ограниченной графиком непрерывной на промежутке $[a; b]$ функции f, принимающей на этом промежутке неотрицательные значения, и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, вокруг оси абсцисс образуется тело объёма V, то

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

1. Опишите, как с помощью интеграла можно вычислить объём пирамиды.
2. Опишите, как с помощью интеграла можно вычислить объём тела вращения.

Упражнения

12.1. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:
1) $y = 2x + 1$, $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$;
2) $y = x^2 + 1$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
4) $y = x^2$, $y = x$;
5) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$, $y = x$.

12.2. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:
1) $y = \sqrt{\cos x}$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$;
2) $y = x - x^2$, $y = 0$;
3) $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 2$.

12.3. В шаре радиуса R на расстоянии $\dfrac{R}{2}$ от центра шара проведена плоскость, которая разбивает шар на две части. Найдите объёмы этих частей.

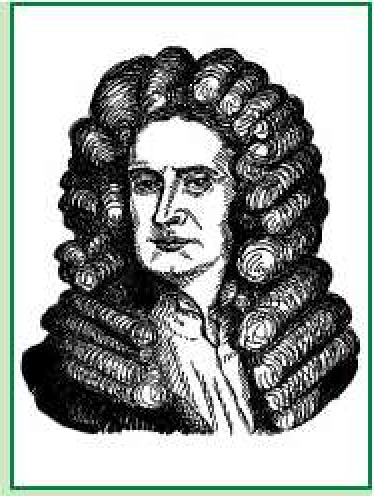
12.4. Докажите, что объём шара радиуса R равен $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

12.5. Выведите формулу для вычисления объёма конуса.

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

«Кто превзошёл своим умом весь род человеческий»

Эти величественные слова написаны потомками о знаменитом английском учёном — физике и математике Исааке Ньютоне (1643–1727). В истории науки в одном ряду с Ньютоном стоит имя немецкого учёного Готфрида Вильгельма Лейбница (1646–1716), который оставил после себя неизгладимый след в философии, математике, юриспруденции, логике, дипломатии, истории, политологии. Среди огромного научного наследия этих гениальных учёных особое место занимают результаты, связанные с созданием дифференциального и интегрального исчисления — науки о производных и первообразных.



Исаак Ньютон

Надо подчеркнуть, что Ньютон и Лейбниц создавали свои теории в то время, когда привычные для нас понятия и термины либо вообще не существовали, либо не имели точного смысла. Попробуйте представить себе учебник по алгебре, в котором нет терминов «множество», «функция», «действительное число», «предел» и т. п. Более того, многие удобные современные обозначения тогда ещё не стали общеупотребительными. Некоторые из них Ньютону и Лейбницу пришлось самим изобретать, обобщать и приспосабливать к потребностям. Например, Лейбниц начал обозначать операцию умножения точкой (до того использовали символы: □, ×, *, М и т. д.), операцию деления — двоеточием (ранее часто использовали букву D); Ньютон распространил обозначение для степени a^n на случай целых и дробных значений n, а обозначение $\sqrt{x}$ обобщил до $\sqrt[n]{x}$. Термин «функция» и символ интеграла «$\int$» впервые встречаются в трудах Лейбница.

Готфрид Вильгельм Лейбниц

Вообще, историю развития математики можно смело разделить на эпохи до и после появления производной и интеграла. Открытия Ньютона и Лейбница дали возможность учёным быстро и просто решать задачи, которые раньше считались неприступными.

Приведём показательный пример. В первой половине XVII века выдающийся итальянский математик Бонавентура Кавальери (1598–1647) предложил новый метод для вычисления площадей. Пользуясь этим методом, Кавальери смог вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^n$, осью абсцисс и вертикальной прямой $x = 1$, при некоторых значениях n (рис. 12.9). Настойчиво работая более 10 лет, с помощью крайне сложных и громоздких рассуждений Кавальери смог решить задачу только для натуральных значений n, меньших 10.

Очевидно, что, используя формулу Ньютона — Лейбница, искомую площадь можно найти в одну строку не только для натуральных, но и для всех положительных значений n:

$$S = \int_0^1 x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Однако в те времена метод, предложенный Кавальери, имел необычайно важное значение, поскольку до XVII века в течение многих веков все попытки учёных решить такую или подобную задачу были вообще безрезультатными.

Для своих расчётов Кавальери сформулировал такой принцип:

если все прямые, параллельные между собой, пересекают фигуры F_1 и F_2 по отрезкам одинаковой длины (рис. 12.10), *то такие фигуры имеют равные площади.*

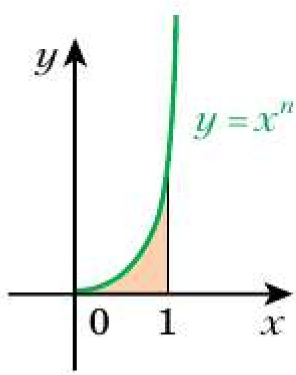


Рис. 12.9

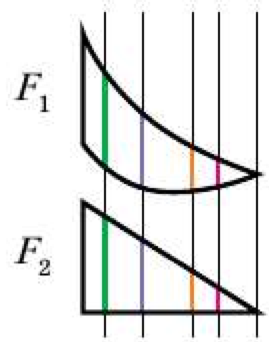


Рис. 12.10

Ознакомившись с этим принципом, в 1644 году выдающийся итальянский математик и физик Эванджелиста Торричелли писал: «Несомненно, что геометрия Кавальери есть удивительное по своей экономии средство для нахождения теорем... Это — истинно царская дорога среди зарослей математического терновника».

Например, из принципа Кавальери следует, что прямоугольник и параллелограмм с одинаковыми стороной и высотой имеют равные площади (рис. 12.11). Однако принцип Кавальери работает и для более сложных фигур. Например, рассмотрим две фигуры: единичный квадрат и криволинейный четырёхугольник $ABCD$, ограниченный линиями $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{x} + 1$, $x = 0$ и $x = 1$

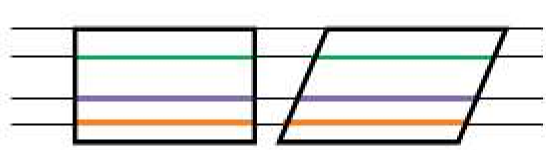


Рис. 12.11

(рис. 12.12). Понятно, что каждая вертикальная прямая пересекает обе фигуры по отрезкам единичной длины. Тогда из принципа Кавальери следует, что площадь криволинейного четырёхугольника $ABCD$ равна площади единичного квадрата, то есть единице. В справедливости этого вывода вы можете убедиться самостоятельно, вычислив площадь криволинейного четырёхугольника $ABCD$ с помощью формулы Ньютона — Лейбница.

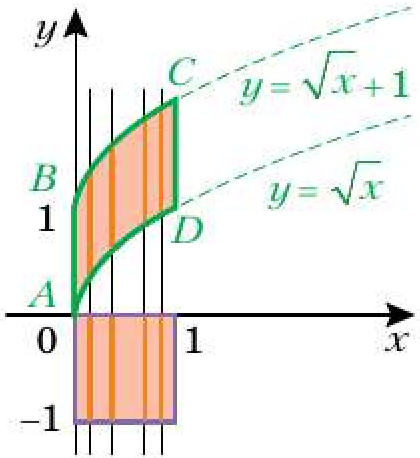


Рис. 12.12

Идеи, близкие к сформулированному принципу Кавальери, натолкнули Ньютона и Лейбница на создание удобной общей теории, которая позволяет просто и быстро строить касательные к сложнейшим кривым, находить наибольшие и наименьшие значения функций, вычислять площади разнообразных фигур, решать многие другие важные и сложные задачи.

глава

3 Комплексные числа

- В этой главе вы узнаете, что цепочку $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, которая показывает соотношение между числовыми множествами, можно продолжить, введя новое числовое множество — множество комплексных чисел.
- Вы научитесь выполнять действия с комплексными числами, узнаете, как можно геометрически интерпретировать комплексные числа. Познакомитесь с замечательным фактом — основной теоремой алгебры.

§ 13 Множество комплексных чисел

Алгебраические уравнения служат математическими моделями реальных процессов, которые изучаются в самых разнообразных областях знаний. Поэтому одним из важных заданий математики является исследование алгебраических уравнений.

Вам хорошо знакома цепочка $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$, которая демонстрирует соотношение между числовыми множествами.

Она иллюстрирует процесс расширения числовых множеств. Во многом это расширение стимулировалось развитием теории решения алгебраических уравнений. Поясним сказанное.

Уравнение $x + 2 = 0$ не имеет натуральных корней. При этом данное уравнение имеет решения на множестве $\boldsymbol{Z}$. Уравнение $2x - 1 = 0$ не имеет решений на множестве $\boldsymbol{Z}$, однако оно имеет решения на множестве $\boldsymbol{Q}$. Уравнение $x^2 - 2 = 0$ не имеет решений на множестве $\boldsymbol{Q}$, однако оно имеет решения на множестве $\boldsymbol{R}$.

Эти примеры показывают, что расширение числовых множеств может сделать «нерешаемое» уравнение «решаемым».

Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений на множестве $\boldsymbol{R}$. Возникает естественный вопрос: есть ли необходимость расширить множество $\boldsymbol{R}$ так, чтобы это уравнение стало «решаемым»?

Обратимся, например, к уравнению $x^3 - 15x + 10 = 0$. Построив график функции $f(x) = x^3 - 15x + 10$ (рис. 13.1), видим, что это уравнение имеет три корня.

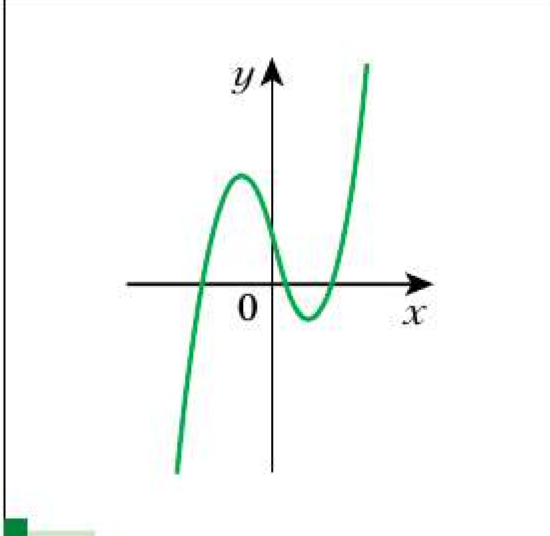


Рис. 13.1

Однако информация о существовании корней данного кубического уравнения никак не помогает найти их. Если методами решения квадратных уравнений владели ещё древние греки, то для кубических уравнений, несмотря на значительные усилия многих поколений учёных, в течение многих веков не удавалось найти более или менее общего способа решения.

Только в XVI веке итальянские учёные изобрели приём, который мы продемонстрируем на данном кубическом уравнении.

Сделав замену $x = z + \frac{5}{z}$, получаем:

$$z^3 + 15z + \frac{75}{z} + \frac{125}{z^3} - 15\left(z + \frac{5}{z}\right) + 10 = 0.$$

Отсюда $z^3 + \frac{125}{z^3} + 10 = 0$. Имеем: $z^6 + 10z^3 + 125 = 0$;

$$(z^3 + 5)^2 + 100 = 0;\ \left(\frac{z^3 + 5}{10}\right)^2 + 1 = 0.$$

Сделав замену $\frac{z^3 + 5}{10} = t$, получим уравнение $t^2 + 1 = 0$.

Конечно, уравнение $t^2 + 1 = 0$ не имеет корней. Но желание решить исходное кубическое уравнение побудило учёных начать рассматривать некоторый новый объект (обозначим его, например, символом i) такой, что $i^2 + 1 = 0$. Выполняя действия с этим объектом как с действительными числами, итальянские математики смогли выразить через него значение переменной z, а затем найти и x. Оказалось, что выражения для нахождения переменной x не содержат символа i и определяют действительные корни данного кубического уравнения.

Таким образом, расширение множества $\boldsymbol{R}$ до множества, на котором уравнение $x^2 + 1 = 0$ будет иметь корни, целесообразно.

Очертим направления поиска нового числового множества. Будем называть его **множеством комплексных чисел**.

1) Множество комплексных чисел должно содержать в себе множество действительных чисел.

2) Над элементами множества комплексных чисел должны быть определены арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление).

3) Арифметические действия должны обладать свойствами соответствующих действий с действительными числами.

4) Уравнение $x^2 + 1 = 0$ должно иметь решение на множестве комплексных чисел.

Среди множеств, которые вы изучали раньше, нет такого, которое удовлетворяло бы всем перечисленным требованиям. Но существует множество, удовлетворяющее некоторым из этих условий.

На координатной плоскости рассмотрим множество (будем обозначать его $\boldsymbol{C}$) всех векторов $\overrightarrow{OZ}$, где O — начало координат, а Z — любая точка плоскости. Элементы множества $\boldsymbol{C}$ можно складывать и вычитать по правилам, подобным тем, по которым складывают и вычитают действительные числа. Например, справедливы такие равенства:

$$\overrightarrow{OZ_1} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ_2} + \overrightarrow{OZ_1};$$

$$\overrightarrow{OZ_1} - (\overrightarrow{OZ_2} + \overrightarrow{OZ_3}) = \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_3}.$$

Пусть точка Z лежит на оси абсцисс и имеет координаты $Z(x;\ 0)$. Тогда вектору $\overrightarrow{OZ}$ с координатами $(x;\ 0)$ соответствует действительное число x (рис. 13.2). И наоборот, каждому действительному числу x соответствует вектор $\overrightarrow{OZ}$ с координатами $(x;\ 0)$. Установленное соответствие позволяет отождествить действительное число x и вектор $\overrightarrow{OZ}$ с координатами $(x;\ 0)$. Множество таких векторов является подмножеством множества $\boldsymbol{C}$. Поэтому можно считать, что $\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{C}$.

Таким образом, множество $\boldsymbol{C}$ частично удовлетворяет описанным выше требованиям к множеству комплексных чисел. Это даёт основания строить множество комплексных чисел, опираясь на множество $\boldsymbol{C}$.

Определение

Комплексным числом называют вектор $\overrightarrow{OZ}$, где O — начало координат, Z — произвольная точка плоскости.

Комплексное число $\overrightarrow{OZ}$ обозначают буквой z. Пишут: $z = \overrightarrow{OZ}$.

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами (1; 0) (рис. 13.3). Этот вектор отождествлён с действительным числом 1. Поэтому такое комплексное число $\overrightarrow{OA}$ обозначают цифрой 1 и называют **единицей**.

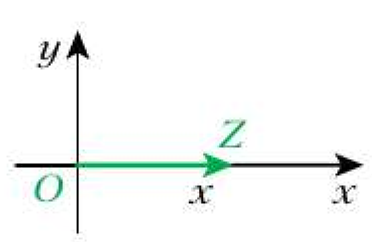


Рис. 13.2

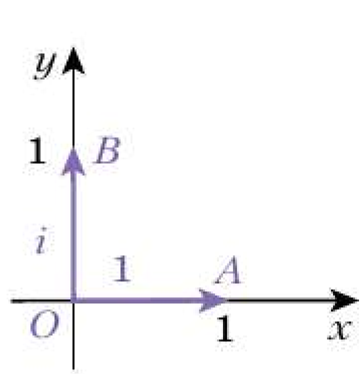


Рис. 13.3

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{OB}$ с координатами (0; 1). Этому вектору не соответствует ни одно из действительных чисел. Такое комплексное число $\overrightarrow{OB}$ обозначают буквой i и называют **мнимой единицей** (см. рис. 13.3).

Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ неколлинеарны. Поэтому для любого вектора $\overrightarrow{OZ}$ существует единственная пара действительных чисел $(a;\ b)$ такая, что $\overrightarrow{OZ} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}$. Заметим, что пара действительных чисел $(a;\ b)$ — это координаты точки Z и вектора $\overrightarrow{OZ}$ (рис. 13.4).

С учётом введённых обозначений равенство $\overrightarrow{OZ} = a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB}$ можно записать так: $z = a \cdot 1 + b \cdot i$.

Таким образом, *любое комплексное число z можно представить в виде $z = a \cdot 1 + b \cdot i$, где a и b — некоторые действительные числа* (координаты точки Z и вектора $\overrightarrow{OZ}$).

Подчеркнём, что в записи $z = a \cdot 1 + b \cdot i$ символы 1 и i — это обозначения векторов с координатами (1; 0) и (0; 1) соответственно.

Вместо выражения $a \cdot 1 + b \cdot i$ для комплексного числа z принята сокращённая запись $a + bi$. Эту запись называют **алгебраической формой комплексного числа.**

В записи $z = a + bi$ число a называют **действительной частью** комплексного числа z и обозначают $\mathrm{Re}\, z$, число b — **мнимой частью** и обозначают $\mathrm{Im}\, z$ (от французских слов *réelle* — действительный и *imaginaire* — мнимый), т. е. $\mathrm{Re}\, z = a$, $\mathrm{Im}\, z = b$.

Например, для комплексного числа $z = 2 + 4i$ имеем: $\mathrm{Re}\, z = 2$, $\mathrm{Im}\, z = 4$ (рис. 13.5).

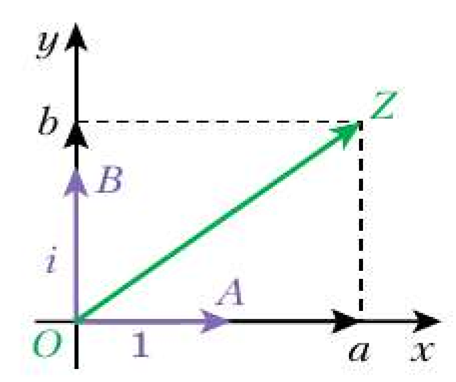


Рис. 13.4

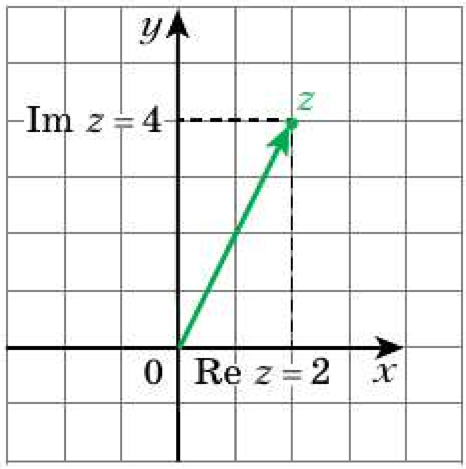


Рис. 13.5

Если $\mathrm{Re}\, z = 0$, т. е. $z = bi$, то такое комплексное число z называют **чисто мнимым.**

Далее, если не обусловлено иначе, в записи $a + bi$ числа a и b будем считать действительными.

Вы знаете, что два вектора равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие координаты. Поэтому *комплексные числа* z_1 *и* z_2 *равны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые действительные части и одинаковые мнимые части.*

Поскольку комплексные числа — это векторы, то можно считать, что для комплексных чисел введены операции сложения, вычитания и умножения на действительное число. Например, выполняются равенства:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$
$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$
$$k(a + bi) = ka + kbi,\ k \in \boldsymbol{R}.$$

Напомним, что записанные равенства выражают правила действий с векторами в координатной форме.

Пример 1. Пусть $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -4 + i$. Выполните действия:

1) $z_1 + 2z_2$; 2) $-\dfrac{z_1}{2} - 3\left(z_2 + \dfrac{z_1}{2}\right)$.

Решение. Имеем:

1) $z_1 + 2z_2 = (3 + 2i) + 2(-4 + i) = 3 + 2i - 8 + 2i = -5 + 4i$;

2) $-\dfrac{z_1}{2} - 3\left(z_2 + \dfrac{z_1}{2}\right) = -\dfrac{1}{2}z_1 - 3z_2 - \dfrac{3}{2}z_1 = -2z_1 - 3z_2 = -6 - 4i + 12 - 3i =$ $= 6 - 7i$. ■

Пример 2. Найдите действительные числа x и y из равенства

$$(3x + 2yi) + (-5y + 4xi) = 1 + 10i.$$

Решение. Сложим комплексные числа, стоящие в левой части равенства:

$$(3x - 5y) + (2y + 4x)i = 1 + 10i.$$

Далее, воспользовавшись условием равенства двух комплексных чисел, получаем:

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1, \\ 2y + 4x = 10. \end{cases}$$

Отсюда находим, что $x = 2$, $y = 1$.

Ответ: 2; 1. ■

Из курса геометрии вам известно, что модулем вектора $\overrightarrow{OZ}$ называют длину отрезка OZ. Если вектор $\overrightarrow{OZ}$ имеет координаты $(a; b)$, то

$|\overline{OZ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким образом, **модулем комплексного числа** $z = a + bi$ является число $\sqrt{a^2 + b^2}$ (рис. 13.6). Пишут: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

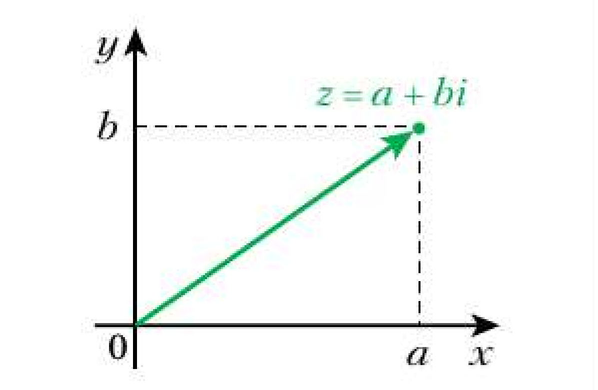


Рис. **13.6**

Модуль комплексного числа является действительным числом.

Например, $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$, $|-5| = \sqrt{(-5)^2 + 0^2} = 5$.

Из определения модуля комплексного числа следует, что для любого $z \in \boldsymbol{C}$ выполняется неравенство $|z| \geqslant 0$, причём $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

На множестве $\boldsymbol{C}$ определены операции сложения, вычитания и умножения на действительное число. Напомним, что одним из мотивов введения комплексных чисел была необходимость найти такое комплексное число, которое является решением уравнения $x^2 + 1 = 0$, т. е. уравнения $x \cdot x + 1 = 0$. Для этого надо дать определение операции произведения комплексных чисел.

Введём произведение комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ так, чтобы сохранить привычные свойства умножения. Для этого в выражении $(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$ раскроем скобки обычным способом:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 (i \cdot i). \qquad (1)$$

Видим, что для определения произведения комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ надо только договориться о значении произведения $i \cdot i$. При этом произведение $i \cdot i$ должно быть определено так, чтобы уравнение $z \cdot z = -1$, т. е. уравнение $z^2 + 1 = 0$, имело решение. Договорились, что $i \cdot i = -1$, т. е. $i^2 + 1 = 0$. Следовательно, равенство (1) можно записать так:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 \cdot (-1) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i.$$

Теперь дадим следующее определение.

Определение

Произведением комплексных чисел $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называют комплексное число $(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$.

Например,

$$(2 + 3i)(1 - i) = (2 + 3) + (-2 + 3)i = 5 + i.$$

Несложно убедиться, что определённое таким образом произведение комплексных чисел обладает всеми свойствами, что и произведение действительных чисел. Например,

1) $z_1z_2 = z_2z_1$,

2) $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$,

3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$.

Из свойств операции умножения следует, что целый ряд тождеств, справедливых для действительных чисел, например формулы сокращённого умножения или правила раскрытия скобок, справедливы и для комплексных чисел. Следовательно, действия с комплексными числами можно выполнять по правилам действий с многочленами, заменяя i^2 на -1.

Пример 3. Найдите все такие комплексные числа z, что $z^2 = -8 + 6i$.

Решение. Пусть $z = a + bi$. Тогда $(a + bi)^2 = -8 + 6i$.

Отсюда $a^2 + 2abi - b^2 = -8 + 6i$; $(a^2 - b^2) + 2abi = -8 + 6i$.

Таким образом, задача сводится к поиску действительных решений системы $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8, \\ 2ab = 6. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ a^2 - \dfrac{9}{a^2} = -8; \end{cases}$ $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ a^4 + 8a^2 - 9 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} b = \dfrac{3}{a}, \\ \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1; \end{array}\right. \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} a = -1, \\ b = -3. \end{cases} \end{array}\right.$

Следовательно, задача имеет два решения: $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -1 - 3i$.

Ответ: $1 + 3i$; $-1 - 3i$. ■

Пример 4. Разложите на множители выражение $a^2 + b^2$, используя формулу разности квадратов.

Решение. Имеем: $a^2 + b^2 = a^2 - b^2i^2 = (a - bi)(a + bi)$. ■

Пары комплексных чисел вида $a - bi$ и $a + bi$ играют важную роль в множестве $\boldsymbol{C}$.

Определение

Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ называют сопряжёнными.

Например, комплексные числа $5 + 7i$ и $5 - 7i$ являются сопряжёнными. Также говорят, что число $5 - 7i$ является сопряжённым числу $5 + 7i$, а число $5 + 7i$ является сопряжённым числу $5 - 7i$.

Комплексное число, сопряжённое числу z, обозначают $\bar{z}$, т. е. если $z = a + bi$, то $\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$.

Например, $\overline{5 + 7i} = 5 - 7i$, $\bar{i} = -i$.

Полученное в примере 4 тождество $(a-bi)(a+bi)=a^2+b^2$ можно записать так: $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. Из этого тождества следует, что *произведение сопряжённых чисел является действительным числом.*

Сопряжённые комплексные числа — это векторы, симметричные относительно оси абсцисс (рис. 13.7)

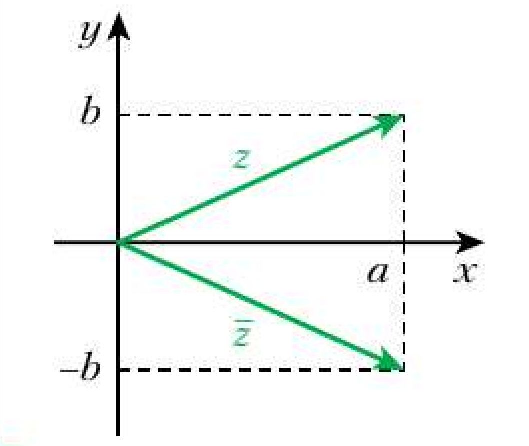


Рис. 13.7

Число, сопряжённое действительному числу a, совпадает с числом a. Например, $\bar{5}=5$.

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 выполняются равенства:

1) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$;

2) $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$;

3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

Докажите их самостоятельно.

Действие деления комплексных чисел определяют, используя действие умножения. Например, под частным чисел $-1+i$ и $1+i$ понимают такое число z, что $z(1+i)=-1+i$. Поскольку $i(1+i)=-1+i$, то число i является частным чисел $-1+i$ и $1+i$.

Определение

Частным комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, называют такое комплексное число z, что $z\cdot z_2=z_1$.

Пишут: $z_1 : z_2 = z$ или $\frac{z_1}{z_2}=z$.

При заданных z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, используя свойства операции умножения, покажем существование и единственность такого z, что $z\cdot z_2=z_1$. Тем самым докажем, что частное комплексных чисел z_1 и z_2 существует и определяется однозначно.

Умножив обе части равенства $z\cdot z_2=z_1$ на $\bar{z}_2$, получим: $zz_2\bar{z}_2=z_1\bar{z}_2$. Отсюда $z|z_2|^2=z_1\bar{z}_2$.

Умножив обе части последнего равенства на действительное число $\frac{1}{|z_2|^2}$, получаем: $z=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

Несложно убедиться, что полученное число $z=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ удовлетворяет равенству $z\cdot z_2=z_1$.

Таким образом, доказано, что частное комплексных чисел z_1 и z_2, где $z_2 \neq 0$, существует и определяется однозначно.

Пример 5. Найдите частное $\dfrac{2-3i}{2+i}$.

Решение. Для нахождения частного $\dfrac{z_1}{z_2}$ удобно умножить числитель и знаменатель дроби на $\overline{z}_2$.

Имеем: $\dfrac{2-3i}{2+i} = \dfrac{(2-3i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{4-2i-6i-3}{4+1} = \dfrac{1-8i}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{8}{5}i.$ ■

Подведём итоги. Множество $\boldsymbol{C}$ удовлетворяет всем четырём сформулированным выше требованиям:

1) множество $\boldsymbol{C}$ содержит в себе множество действительных чисел;

2) над элементами множества $\boldsymbol{C}$ определены арифметические действия;

3) арифметические действия на множестве $\boldsymbol{C}$ обладают свойствами соответствующих действий с действительными числами;

4) уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет решение на множестве $\boldsymbol{C}$.

?

1. Что называют комплексным числом?

2. Какую запись называют алгебраической формой комплексного числа?

3. Что называют модулем комплексного числа?

4. Что называют произведением комплексных чисел?

5. Какие комплексные числа называют сопряжёнными?

6. Что называют частным комплексных чисел?

Упражнения

13.1. Представьте в алгебраической форме комплексные числа, изображённые на рисунке 13.8.

13.2. Назовите действительную и мнимую части комплексного числа:

1) -5;	4) $4 - 5i$;
2) $3i$;	5) $i - 2$;
3) $3 + 2i$;	6) $-1 - 6i$.

13.3. Укажите, какие из данных комплексных чисел равны:

$z_1 = 2 - 3i$; $z_2 = 2 - \sqrt[3]{27}i$;

$z_3 = 3 - 2i$; $z_4 = \sqrt{4} - 3i$;

$z_5 = \sqrt{9} - \sqrt{4}i$; $z_6 = \sqrt[3]{8} - 3i$.

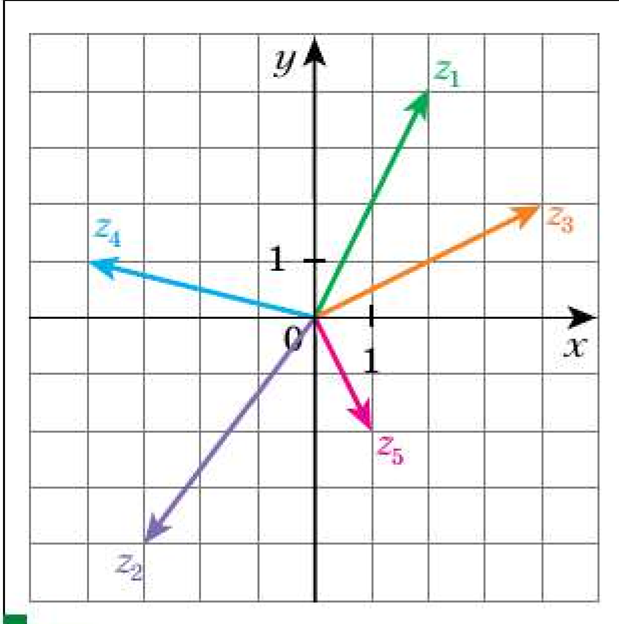


Рис. 13.8

13.4. Найдите действительные числа x и y из равенства:

1) $x + (x - y)\,i = -6 + i$;
2) $x^2 + xyi = 9 - 2i$;
3) $(x^2 + 5yi) - (y + xi) = 3 + 3i$.

13.5. Найдите действительные числа x и y из равенства:

1) $5x - 7yi = 2 + 3i$;
2) $6x - y^2 i = -1 - 4i$;
3) $(x + 3y^2 i) - (2y - xi) = 1 + 6i$.

13.6. Найдите сумму комплексных чисел:

1) $(3 - 5i) + (2 + 3i)$; 2) $4i + (1 - i)$; 3) $(4 - 3i) + 2$.

13.7. Найдите разность комплексных чисел z_1 и z_2, если:

1) $z_1 = -9 + 2i$, $z_2 = 2 - 5i$;
2) $z_1 = 7$, $z_2 = 4 + i$;
3) $z_1 = -3 - i$, $z_2 = 4 + i$.

13.8. Найдите значение выражения $3z_1 - 2z_2$, если $z_1 = 5 - 6i$, $z_2 = 1 - 9i$.

13.9. Решите уравнение $-2(z + i) = 4 - 3i$.

13.10. Решите уравнение $3(z - 1) = i - z$.

13.11. Напишите число, сопряжённое данному:

1) $2 - 7i$; 2) $-3 + 5i$; 3) 6; 4) $-7i$.

13.12. Напишите число, сопряжённое данному:

1) $8 - 3i$; 2) $-6 + 11i$; 3) -12; 4) $9i$.

13.13. Докажите, что: 1) $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re} z$; 2) $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im} z$.

13.14. Найдите модуль комплексного числа:

1) $-7i$; 2) 3; 3) $5 + 12i$.

13.15. Найдите модуль комплексного числа:

1) $4i$; 2) -18; 3) $15 - 8i$.

13.16. Докажите, что для всех $z \in \boldsymbol{C}$ выполняется равенство: 1) $\overline{\overline{z}} = z$; 2) $|z| = |\overline{z}|$.

13.17. Докажите, что для всех $z \in \boldsymbol{C}$ число $z^2 + \overline{z}^2$ является действительным.

13.18. Докажите, что равенство $\overline{z} = z$ справедливо тогда и только тогда, когда z — действительное число.

13.19. Найдите произведение комплексных чисел:

1) $(2 + 3i)(3 + 2i)$; 2) $(4 + 3i)(4 - 3i)$; 3) $(5 + i)2i$.

13.20. Найдите произведение комплексных чисел:

1) $(6 + i)(1 - 3i)$; 2) $(2 - 3i)(2 + 3i)$; 3) $3i\,(7 - 4i)$.

13.21. Найдите значение выражения: 1) i^{73}; 2) i^{4n+2}; 3) i^{4n+3}, $n \in \boldsymbol{N}$.

13.22. Найдите значение выражения: 1) i^{54}; 2) i^{4n}; 3) i^{4n+1}, $n \in \boldsymbol{N}$.

13.23. Упростите выражение:

1) $(2 + i)(1 - i) + i(4 - 5i)$;
2) $(\sqrt{5} + 2i)(\sqrt{5} - 2i) + (1 - i)^2$;
3) $(1 + i)^4$;
4) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

13.24. Упростите выражение:

1) $(4-i)i+(7-2i)(3+i)$;
2) $(1-\sqrt{2}i)(1+\sqrt{2}i)+(1+i)^2$;
3) $(1-i)^4$;
4) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

13.25. Найдите все такие комплексные числа z, что:

1) $z^2=i$;
2) $z^2=-5+12i$.

13.26. Найдите все такие комплексные числа z, что:

1) $z^2=-i$;
2) $z^2=15-8i$.

13.27. Вычислите:

1) $\frac{-1}{i}$;
2) $\frac{2+i}{-i}$;
3) $\frac{4}{2-i}$;
4) $\frac{3i}{1+2i}$;
5) $\frac{1+4i}{2+3i}$;
6) $\frac{3+4i}{3-4i}$.

13.28. Вычислите:

1) $\frac{3}{-i}$;
2) $\frac{5i}{3+2i}$;
3) $\frac{7+i}{2+i}$;
4) $\frac{4-5i}{4+5i}$.

13.29. Решите уравнение:

1) $iz=2+i$;
2) $(4-i)z=3+i$;
3) $\frac{i}{z+i}=\frac{4-i}{iz-1}$.

13.30. Решите уравнение:

1) $-iz=7-3i$;
2) $(4+3i)z=4-3i$;
3) $\frac{3i-z}{i-1}=2iz+1$.

13.31. Вычислите:

1) $\frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$;
2) $\frac{4-3i}{(1-i)(2+i)}$;
3) $\frac{2}{3-i}+\frac{2}{3+i}$;
4) $\frac{1+2i}{1-2i}+\frac{1-2i}{1+2i}$;
5) $\left(\frac{1+i^7}{1-i^5}\right)^9$.

13.32. Вычислите:

1) $\frac{(2+5i)(1+i)}{-1+i}$;
2) $\frac{4+i}{(-2+3i)(1+2i)}$;
3) $\frac{5+i}{5-i}+\frac{5-i}{5+i}$;
4) $\left(\frac{1-i^{19}}{1+i^{17}}\right)^{15}$.

13.33. Дано: $z_1=1+i$, $z_2=3-2i$. Вычислите:

1) $\frac{\bar{z}_1}{z_2}$;
2) $\frac{z_1}{\bar{z}_1+z_2}$;
3) $\frac{z_1-z_2}{\bar{z}_2}$.

13.34. Дано: $z_1=1-i$, $z_2=3+2i$. Вычислите:

1) $\frac{z_1+\bar{z}_2}{(z_2)^2}$;
2) $\frac{z_1-\bar{z}_2}{\bar{z}_1-z_2}$;
3) $\frac{(\bar{z}_1+z_2)^2}{z_2}$.

13.35. Докажите неравенство:

1) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

2) $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$.

13.36. Докажите равенство $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

13.37. Докажите неравенство $|z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$.

13.38. Докажите, что $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

13.39. Докажите, что число $z^n + \overline{z}^n$ является действительным для всех $z \in \boldsymbol{C}$.

13.40. Докажите, что:

1) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$; 2) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

13.41. Найдите все натуральные значения n, при которых значение выражения $1 + i + i^2 + \ldots + i^n$ равно 1.

13.42. Найдите значение выражения $i + 2i^2 + 3i^3 + \ldots + 100i^{100}$.

13.43. Найдите все комплексные числа, которые являются сопряжёнными своему квадрату.

13.44. Докажите, что если $x + yi = (a + bi)^n$, то $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^n$.

13.45. Докажите, что если $x + yi = (a + bi)^n$, то $x - yi = (a - bi)^n$.

§ 14 Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на координатной плоскости точку $Z(a;\ b)$. Поскольку комплексное число $z = a + bi$ — это вектор $\overrightarrow{OZ}$ с координатами $(a;\ b)$, то каждому комплексному числу $z = a + bi$ можно поставить в соответствие единственную точку $Z(a;\ b)$ координатной плоскости (рис. 14.1). И наоборот, каждая точка Z с координатами $(a;\ b)$ соответствует единственному комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число $z = a + bi$ называют **комплексной координатой** точки $Z(a;\ b)$. Например, число $z = 2 - 3i$ является комплексной координатой точки M с декартовыми координатами $(2;\ -3)$ (рис. 14.2). Это обозначают так: $M(2 - 3i)$.

Полученное взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и множеством точек координатной плоскости позволя-

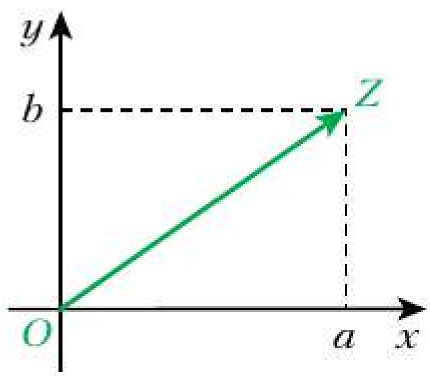


Рис. 14.1

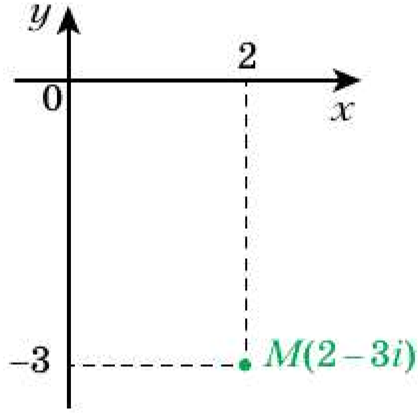


Рис. 14.2

ет отождествлять элементы этих двух множеств. Так, вместо слов «точка, изображающая число $2 - 3i$» (см. рис. 14.2) коротко говорят «точка $2 - 3i$». Также, например, говорят «треугольник с вершинами $1 - i$, $1 + i$, $-i$» (рис. 14.3).

При такой интерпретации действительные числа изображаются точками оси абсцисс, а чисто мнимые числа — точками оси ординат. Поэтому ось абсцисс называют **действительной осью** (обозначают Re), а ось ординат — **мнимой осью** (обозначают Im). Плоскость, на которой изображают комплексные числа z, называют **комплексной плоскостью**.

На комплексной плоскости рассмотрим точки $A_1(z_1)$ и $A_2(z_2)$ (рис. 14.4). Поскольку $\overrightarrow{A_2A_1} = \overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_2} = z_1 - z_2$, то пишут: $\overrightarrow{A_2A_1} = z_1 - z_2$. Поэтому считают, что любой вектор на плоскости равен разности комплексной координаты конца вектора и комплексной координаты начала вектора. Таким образом, любой вектор на плоскости рассматривают как комплексное число.

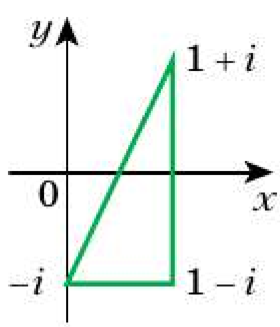


Рис. 14.3

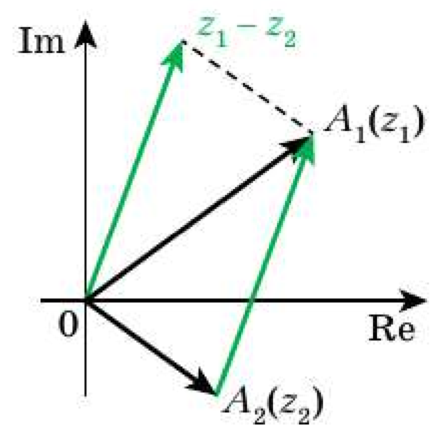


Рис. 14.4

Из равенства $\overrightarrow{A_2A_1} = z_1 - z_2$ получаем: $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{A_2A_1}| = A_2A_1$. Таким образом, *число* $|z_1 - z_2|$ *равно расстоянию между точками* z_1 *и* z_2. Это свойство выражает геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел.

Пример 1. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию: 1) $z\bar{z} = 1$; 2) $1 < |z + 1| < 2$; 3) $|z - i| = |z - 1|$.

Решение. 1) Поскольку $z\bar{z} = |z|^2$, то получаем, что $|z| = 1$. Тогда все искомые точки находятся на расстоянии 1 от начала координат. Следовательно, искомое множество точек — это окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 14.5).

2) Рассмотрим неравенство $|z + 1| < 2$, которое запишем так: $|z - (-1)| < 2$. Число $|z - (-1)|$ равно расстоянию от точки $-1 + 0i$ до некоторой точки z. Тогда неравенству $|z + 1| < 2$ удовлетворяют все те и только те точки комплексной плоскости, которые лежат внутри круга радиуса 2 с центром в точке $-1 + 0i$.

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что неравенству $|z + 1| > 1$ удовлетворяют все те и только те точки комплексной плоскости, которые лежат вне круга радиуса 1 с центром в точке $-1 + 0i$.

Тогда искомые точки образуют кольцо, ограниченное окружностями $|z + 1| = 1$ и $|z + 1| = 2$ (рис. 14.6).

3) Данному условию удовлетворяют все те и только те точки комплексной плоскости, которые равноудалены от точек i и 1. Таким образом, искомое множество — это серединный перпендикуляр отрезка с концами i и 1 (рис. 14.7). ■

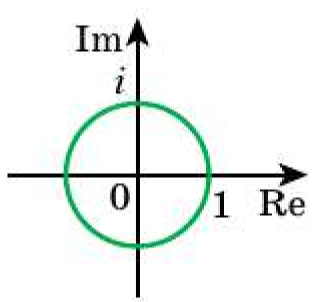


Рис. 14.5

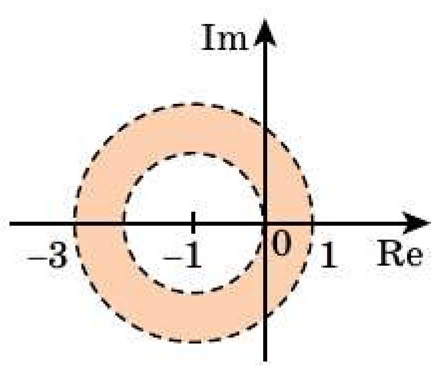


Рис. 14.6

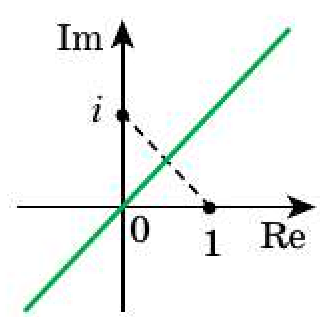


Рис. 14.7

Рассмотрим комплексные числа z и z_0 такие, что $|z| = |z_0|$ и точка z_0 принадлежит положительному направлению действительной оси (рис. 14.8). Тогда точку z можно рассматривать как образ точки z_0 при повороте с центром O на некоторый угол φ, т. е. $z = R_O^{\varphi}(z_0)$.

Угол φ называют **аргументом** комплексного числа z. Его обозначают так: $\arg z$.

Для числа $z = 0$ аргумент не определяют. Поэтому во всех дальнейших рассуждениях, связанных с аргументом комплексного числа z, будем считать, что $z \neq 0$.

Поскольку существует бесконечно много углов поворота, при которых точка z является образом точки z_0, то данное комплексное число z имеет бесконечно много аргументов. Любые два аргумента данного комплексного числа отличаются друг от друга на число вида $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Например, каждое число вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является аргументом числа i. Легко установить, что каждый угол вида $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, является аргументом числа $-1 + i$ (рис. 14.9).

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $z = a + bi$. Тогда из определения синуса и косинуса угла поворота можно записать: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$ (рис. 14.10). Поэтому число z можно представить в таком виде:

$$\boxed{\boldsymbol{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}} \qquad (1)$$

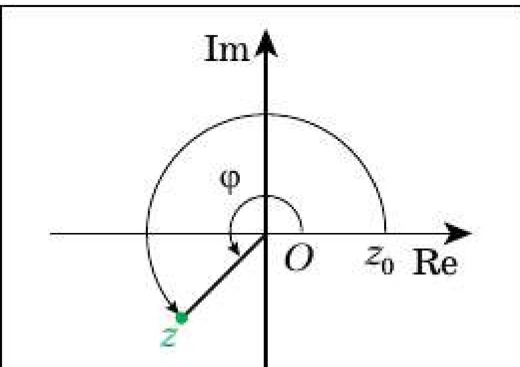


Рис. **14.8**

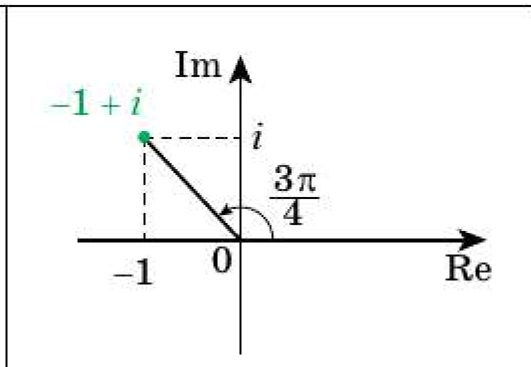


Рис. **14.9**

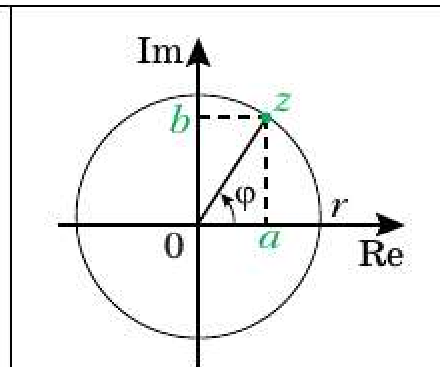


Рис. **14.10**

Запись комплексного числа z ($z \neq 0$) в виде (1) называют **тригонометрической формой комплексного числа**.

Например, $5 = 5(\cos 0 + i\sin 0)$;

$$-3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi);$$

$$2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right);$$

$$-3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

Поскольку модуль комплексного числа $z = a + bi$ равен $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, то аргумент φ комплексного числа z, где $z \neq 0$, можно найти из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{cases} \qquad (2)$$

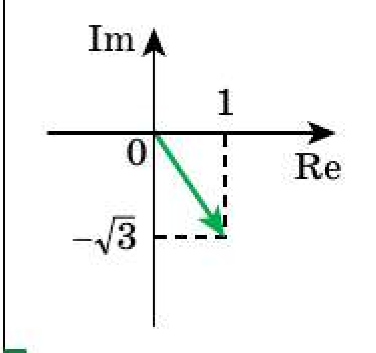


Рис. **14.11**

Пример 2. Запишите комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. На рисунке 14.11 изображено комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.

Используя формулы (2), находим: $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ Отсюда $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Тогда искомой тригонометрической формой числа $z = 1 - i\sqrt{3}$ могут служить, например, такие записи:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right). \blacksquare$$

Заметим, что комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$ можно представить и так:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Однако такая запись не является тригонометрической формой комплексного числа z.

Отметим, что для двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме, равенство $z_1 = z_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$ для некоторого $k \in \boldsymbol{Z}$.

1. Что называют комплексной координатой точки?
2. Какую плоскость называют комплексной?
3. Какую запись называют тригонометрической формой комплексного числа?

Упражнения

14.1. Отметьте на комплексной плоскости точку, соответствующую комплексному числу: 1) 3; 2) $-5i$; 3) $1 + 2i$; 4) $-3 + i$; 5) $2 - 3i$; 6) $-4 - i$; 7) $\frac{1}{1 - i}$; 8) $(1 + i)^4$.

14.2. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $\operatorname{Re} z = 3$; 3) $\operatorname{Im} z = -1$; 5) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$;
2) $\operatorname{Re} z \geqslant 4$; 4) $\operatorname{Im} z \leqslant 2$; 6) $(\operatorname{Re} z)^2 = \operatorname{Im} z$.

14.3. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $\operatorname{Re} z = -2$; 3) $\operatorname{Im} z = 4$; 5) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$;
2) $\operatorname{Re} z \leqslant 1$; 4) $\operatorname{Im} z \geqslant -3$; 6) $(\operatorname{Re} z)^2 = (\operatorname{Im} z)^2$.

14.4. Воспользовавшись рисунком 14.12, назовите комплексное число, равное вектору: 1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{BD}$.

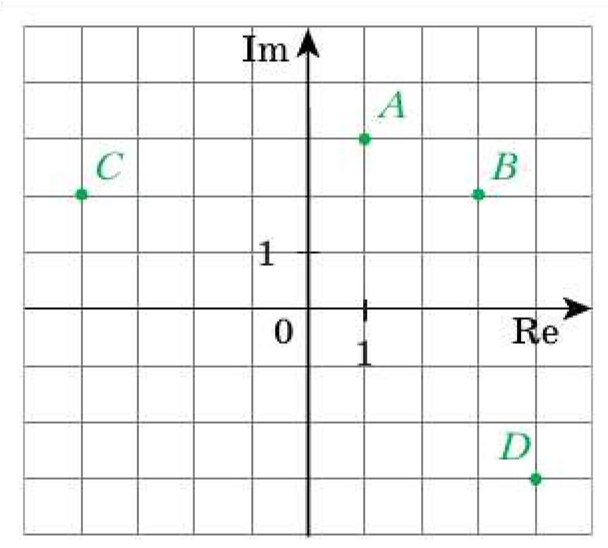


Рис. **14.12**

14.5. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $|z| = 1$; 3) $|z + i| = 2$;
2) $|z| \leqslant 1$; 4) $|z + i| \geqslant 2$.

14.6. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $|z - 2i| = 3$; 3) $|z - 2i| \geqslant 3$.
2) $|z - 2i| < 3$;

14.7. Найдите все аргументы комплексного числа:

1) 7; 2) $4i$; 3) $-2 - 2i$; 4) $\sqrt{3} + i$.

14.8. Найдите все аргументы комплексного числа:

1) -3; 2) $-5i$; 3) $-3 + 3i$; 4) $-1 + i\sqrt{3}$.

14.9. Укажите, какие из комплексных чисел записаны в тригонометрической форме:

1) $3\left(\cos\frac{\pi}{11} - i\sin\frac{\pi}{11}\right)$; 5) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi)$; 6) $\cos\left(-\frac{1}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

3) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 7) $6\left(\sin\frac{2\pi}{13} + i\cos\frac{2\pi}{13}\right)$;

4) $5\left(\cos\left(-\frac{27\pi}{5}\right) + i\sin\frac{27\pi}{5}\right)$; 8) $\cos 2\pi + i\sin 4\pi$.

14.10. Запишите в тригонометрической форме комплексное число:

1) 7; 3) $-2 + 2i$; 5) $-1 + 2i$; 7) $(3 - 2i)^2$;
2) $4i$; 4) $\sqrt{3} + i$; 6) $-3 - i$; 8) $\frac{2 + i}{1 + i}$.

14.11. Запишите в тригонометрической форме комплексное число:

1) -3; 3) $-3 + 3i$; 5) $2 - i$; 7) $(1 + 3i)^2$;

2) $-5i$; 4) $-1 + \sqrt{3}i$; 6) $-2 - 3i$; 8) $\frac{3 - i}{1 - i}$.

14.12. Запишите в тригонометрической форме комплексное число:

1) $4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $-2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

2) $3\left(\cos\frac{\pi}{11} - i\sin\frac{\pi}{11}\right)$; 5) $-\cos\frac{1}{3} - i\sin\frac{1}{3}$.

3) $6\left(\sin\frac{2\pi}{13} + i\cos\frac{2\pi}{13}\right)$;

14.13. Запишите в тригонометрической форме комплексное число:

1) $5\left(\cos\left(-\frac{19\pi}{5}\right) + i\sin\frac{19\pi}{5}\right)$; 3) $\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$;

2) $7\left(\cos\frac{7\pi}{29} - i\sin\frac{7\pi}{29}\right)$; 4) $-3\left(\cos\frac{2\pi}{11} + i\sin\frac{2\pi}{11}\right)$.

14.14. Докажите, что если φ — аргумент комплексного числа z, то $-\varphi$ — аргумент комплексного числа $\bar{z}$.

14.15. Докажите, что если φ — аргумент комплексного числа z, то $-\varphi$ — аргумент комплексного числа $\frac{1}{z}$.

14.16. На комплексной плоскости отметили точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$. Найдите комплексную координату середины отрезка AB.

◆◆

14.17. На комплексной плоскости отметили точки $A(z_1)$ и $B(z_2)$. Найдите комплексную координату такой точки C отрезка AB, что $AC : CB = m : n$.

14.18. На комплексной плоскости изображён треугольник с вершинами $A(z_1)$, $B(z_2)$ и $C(z_3)$. Найдите комплексную координату точки пересечения медиан треугольника ABC.

14.19. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $1 < |z - 1 - i| < 3$; 3) $|z - 2i| > |z - 4|$; 5) $|z| \leqslant \operatorname{Im} z$;

2) $|z - 2i| = |z - 4|$; 4) $|z| = \operatorname{Re} z$; 6) $|z - 1| = \operatorname{Re} z$.

14.20. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $2 \leqslant |z - 1 + i| < 3$; 3) $|z - 2| \geqslant |z + 4i|$; 5) $|z| \geqslant \operatorname{Re} z$;

2) $|z - 2| = |z + 4i|$; 4) $|z| = \operatorname{Im} z$; 6) $|z - i| = \operatorname{Im} z$.

◆◆◆

14.21. Представьте в тригонометрической форме число $1 + \cos\varphi + i\sin\varphi$, если: 1) $\varphi \in (0; \pi)$; 2) $\varphi \in (\pi; 2\pi)$.

14.22. Представьте в тригонометрической форме число $1-\cos\varphi+i\sin\varphi$, если: 1) $\varphi\in(0;\ \pi)$; 2) $\varphi\in(-\pi;\ 0)$.

14.23. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z}+\mathrm{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$; 2) $(1+i)\overline{z}=(1-i)z$.

14.24. Изобразите на комплексной плоскости все числа z, удовлетворяющие условию:

1) $\mathrm{Re}\dfrac{1}{z}-\mathrm{Im}\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4}$; 2) $(1-i)\overline{z}=(1+i)z$.

§ 15 Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Корень n-й степени из комплексного числа

Найдём произведение комплексных чисел z_1 и z_2, записанных в тригонометрической форме.

Пусть $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$.

Имеем: $z_1z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$

$$=r_1r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2))=$$
$$=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)).$$

Следовательно,

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (1)$$

Полученная формула позволяет сделать такой вывод: ***модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей множителей, а сумма аргументов множителей является аргументом произведения.***

Из формулы (1) следует, что если комплексную координату точки M умножить на комплексное число $\cos\varphi+i\sin\varphi$, то получим точку M_1 — образ точки M при повороте R_O^{φ}, т. е. при повороте с центром в начале координат на угол φ (рис. 15.1).

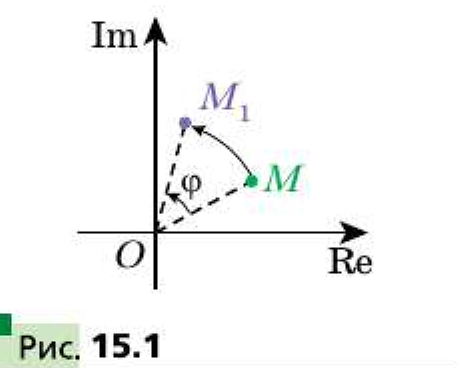


Рис. 15.1

Например, умножение комплексной координаты точки M на число $i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$ задаёт поворот точки M с центром в начале координат на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

Если комплексную координату точки M умножить на комплексное число $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то получим точку M_2 — образ точки M при композиции преобразований поворота R_O^{φ} и гомотетии H_O^r, т. е. $R_O^{\varphi}(M) = M_1$ и $H_O^r(M_1) = M_2$ (рис. 15.2).

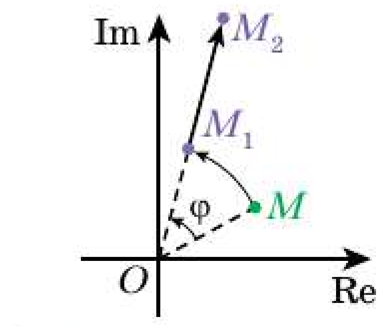


Рис. 15.2

Вычислим частное $\frac{z_1}{z_2}$. Имеем:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2))}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (2)$$

Полученная формула позволяет сделать следующий вывод: ***модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а разность аргументов делимого и делителя является аргументом частного.***

Из формулы (1) следует, что

$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi),$$
$$(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Вообще, для любого $n \in \boldsymbol{N}$ справедлива формула

$$\boxed{\boldsymbol{(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),}}$$

которую называют **формулой Муавра**.

С помощью метода математической индукции докажите формулу Муавра самостоятельно.

Пример 1. Вычислите $\left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^{12}$.

Решение. Имеем: $z_1 = \sqrt{3} + i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$,

$$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Тогда

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{12} = \left(\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{12} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{12} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^{12} = 2^6(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)) = -64. \blacksquare$$

Определение

Корнем n-й степени из комплексного числа z, где $n \in N$, $n > 1$, называют такое комплексное число ω, что $\omega^n = z$.

Например, число $1 + i$ является квадратным корнем из числа $2i$. Действительно, $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$. Число $-1 - i$ также является квадратным корнем из числа $2i$.

Очевидно, что число 1 является кубическим корнем из числа 1. Вы знаете, что на множестве $\boldsymbol{R}$ существует только одно число, являющееся кубическим корнем из единицы. На множестве $\boldsymbol{C}$ это свойство не сохраняется. Каждое из чисел $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ также является кубическим корнем из единицы. Действительно,

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^3 = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,$$

$$\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^3 = \cos 4\pi + i\sin 4\pi = 1.$$

Таким образом, на множестве комплексных чисел кубический корень из единицы принимает по крайней мере три значения. На самом деле имеет место такая теорема.

Теорема 15.1

Для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует ровно n комплексных чисел, каждое из которых является корнем n-й степени из числа z.

Доказательство

Представим число z в тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Корнями n-й степени из числа z будут все те и только те комплексные числа ω, которые удовлетворяют равенству $\omega^n = z$. Покажем, что при заданном z уравнение $\omega^n = z$ имеет ровно n корней (тем самым теорема будет доказана).

Если $\omega = 0$, то $\omega^n = 0$, т. е. $z = 0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $\omega \neq 0$.

Тогда число ω можно представить в тригонометрической форме: $\omega = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Уравнение $\omega^n = z$ перепишем в виде:

$$\left(\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)\right)^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$
$$\rho^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Воспользовавшись условием равенства двух комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, получаем: $\rho^n = r$ и $n\alpha = \varphi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Поскольку ρ и r являются положительными действительными числами, то можно записать: $\rho = \sqrt[n]{r}$ (здесь $\sqrt[n]{r}$ — это арифметический корень n-й степени из положительного действительного числа r). Также получаем, что $\alpha = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Таким образом, искомые числа ω могут быть записаны в виде:

$$\omega = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{3}$$

Если в правой части равенства (3) заменить значение k на $k + n$, то значение выражения не изменится. Это означает, что достаточно рассмотреть только такие значения k: 0, 1, 2, ..., $n - 1$. Имеем:

$$\omega_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$\omega_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{n}\right),$$

$$\ldots,$$

$$\omega_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}\right).$$

Отметим, что числа ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1} попарно различны, поскольку любые из двух углов $\dfrac{\varphi}{n}$, $\dfrac{\varphi + 2\pi}{n}$, ..., $\dfrac{\varphi + 2\pi(n-1)}{n}$ отличаются менее чем на 2π.

Следовательно, формула (3) задаёт ровно n чисел ω_0, ω_1, ω_2, ..., ω_{n-1}, каждое из которых является корнем n-й степени из числа z. ■

Таким образом, мы пришли к выводу, что все n корней n-й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, записанного в тригонометрической форме, можно вычислить по формуле

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ \text{где } k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}} \tag{4}$$

Задача нахождения корня n-й степени из комплексного числа будет решена полностью, если мы найдём все значения корня n-й степени из числа $z = 0$.

Очевидно, что число $\omega = 0$ удовлетворяет равенству $\omega^n = 0$. Других чисел, удовлетворяющих равенству $\omega^n = 0$, не существует. Действительно, при $\omega \neq 0$ имеем: $|\omega^n| = |\omega|^n \neq 0$. Отсюда $\omega^n \neq 0$.

Пример 2. Найдите кубические корни из числа $z = -1$.

Решение. Имеем: $z = -1 + 0i = 1(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Воспользовавшись формулой (4), запишем:

$$\omega_k = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \text{ где } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Отсюда $\omega_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\omega_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3}\right) = -1,$$

$$\omega_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}. \ ■$$

Из формулы (4) следует, что корни n-й степени из числа 1 вычисляют по формуле $e_k = \cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}$, где $k \in \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$.

Заметим, что модули комплексных чисел e_k равны 1. Поэтому на комплексной плоскости числа e_k лежат на окружности радиуса 1, причём аргументы соседних чисел отличаются на $\frac{2\pi}{n}$. Поэтому числа e_k делят единичную окружность на n равных частей и являются вершинами правильного n-угольника.

Например, на рисунке 15.3 изображены кубические корни из числа 1. Они являются вершинами правильного треугольника. На рисунке 15.4 изображены корни четвёртой степени из числа 1. Они являются вершинами квадрата.

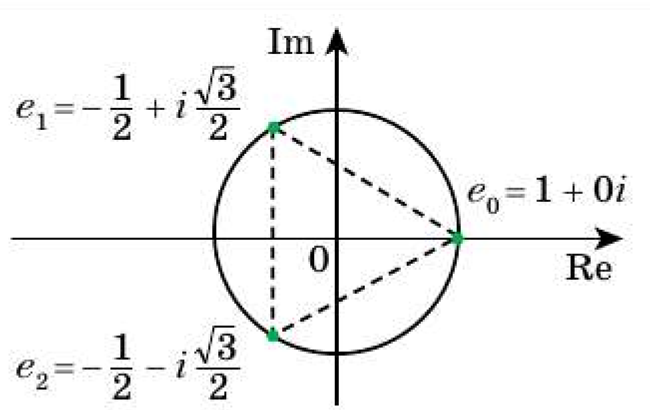


Рис. 15.3

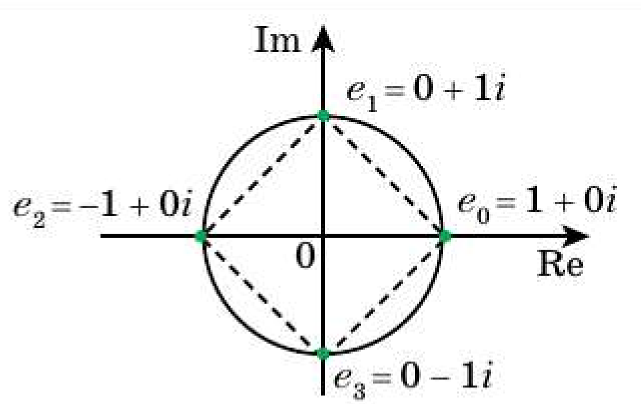


Рис. 15.4

1. Как умножают и делят комплексные числа в тригонометрической форме?
2. С помощью какой формулы возводят комплексное число в степень?
3. По какой формуле вычисляют корень n-й степени из комплексного числа?

Упражнения

15.1. Найдите произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если:

1) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$;

2) $z_1 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{16}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{16}\right)\right)$, $z_2 = \cos 1 + i\sin 1$;

3) $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = -2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

4) $z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$, $z_2 = \sqrt{3} + i$.

15.2. Найдите произведение комплексных чисел z_1 и z_2, если:

1) $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

2) $z_1 = 7\left(\cos\frac{1}{3} + i\sin\frac{1}{3}\right)$, $z_2 = 3\left(\cos\left(-\frac{1}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{1}{4}\right)\right)$;

3) $z_1 = -3\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, $z_2 = -4\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

15.3. Найдите частное $\frac{z_1}{z_2}$, если:

1) $z_1 = 8\left(\cos\frac{7\pi}{10} + i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$;

2) $z_1 = 6\left(\sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}\right)$, $z_2 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{16} + i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$;

3) $z_1 = -2(\cos 2 + i\sin 2)$, $z_2 = \cos 1 + i\sin 1$.

15.4. Найдите частное $\frac{z_1}{z_2}$, если:

1) $z_1 = 12\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, $z_2 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$;

2) $z_1 = 9\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2 = -3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

3) $z_1 = 15(\cos 6 + i\sin 6)$, $z_2 = 5(\sin 2 + i\cos 2)$.

15.5. Запишите в тригонометрической форме число z, если:

1) $z = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{20} + i\sin\frac{\pi}{20}\right)\right)^{10}$;

2) $z = \left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{18} - i\sin\frac{\pi}{18}\right)\right)^{6}$;

3) $z = \left(\cos\frac{1}{35} + i\sin\frac{1}{35}\right)^{7}$.

15.6. Запишите в тригонометрической форме число z, если:

1) $z = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)\right)^{4}$;

2) $z = \left(-2\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right)^{5}$.

◆◆

15.7. Найдите значение выражения:

1) $(1 + i)^{20}$;

2) $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{9}$;

3) $(3 + 4i)^{4}$;

4) $(1 - i)^{12}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{6}$;

5) $\frac{(1 + i)^{10}}{(\sqrt{3} - i)^{8}}$.

15.8. Найдите значение выражения:

1) $(1 - i)^{14}$;

2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{15}$;

3) $\left(\frac{5}{13} - \frac{12}{13}i\right)^{10}$;

4) $(1 + i)^{10}(\sqrt{3} + i)^{8}$;

5) $\frac{(1 - i)^{14}}{(1 + \sqrt{3}i)^{9}}$.

15.9. Найдите корни n-й степени из числа z, если:

1) $z = 3\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $n = 3$;

2) $z = 8\left(\cos\frac{6}{7} + i\sin\frac{6}{7}\right)$, $n = 3$;

3) $z = -32i$, $n = 5$;

4) $z = \sqrt{3} + i$, $n = 4$.

15.10. Найдите корни n-й степени из числа z, если:

1) $z = 4\left(\cos\frac{16\pi}{19} + i\sin\frac{16\pi}{19}\right)$, $n = 4$;

2) $z = 125\left(\cos\frac{9}{11} + i\sin\frac{9}{11}\right)$, $n = 3$;

3) $z = 64$, $n = 6$;

4) $z = \sqrt{3} - i$, $n = 4$.

15.11. Изобразите на комплексной плоскости числа, являющиеся корнями n-й степени из числа z, если:

1) $z = i$, $n = 3$; 2) $z = 1 + i$, $n = 4$; 3) $z = -i$, $n = 6$.

15.12. Изобразите на комплексной плоскости числа, являющиеся корнями n-й степени из числа z, если:

1) $z = -1$, $n = 4$; 2) $z = 1 + \sqrt{3}i$, $n = 3$; 3) $z = 1$, $n = 8$.

15.13. Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ — корни n-й степени из числа 1. Найдите произведение $e_0 e_1 \cdot \ldots \cdot e_{n-1}$.

15.14. Пусть $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ — корни n-й степени из числа 1. Найдите сумму $e_0 + e_1 + \ldots + e_{n-1}$.

15.15. Найдите все такие действительные x и y, что $(x + yi)^6 = x - yi$.

15.16. Найдите все такие действительные x и y, что $(x + yi)^4 = x - yi$.

15.17. Учащийся доказывает «равенство» $1 = -1$ так: $1 = \sqrt{(-1)^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = i^2 = -1$. В чём состоит ошибка учащегося?

КОГДА СДЕЛАНЫ УРОКИ

Применение комплексных чисел

Комплексные числа возникли довольно неожиданно: при поиске действительных корней кубических уравнений с действительными коэффициентами. Во многих случаях применение комплексных чисел также является неожиданным. Вообще, комплексные числа могут служить эффективным инструментом для решения задач комбинаторики, тригонометрии, теории чисел, геометрии и многих других областей математики.

Пример 1. Найдите значение выражения

$$S = 1 - 3C_{101}^2 + 3^2 C_{101}^4 - 3^3 C_{101}^6 + \ldots - 3^{49} C_{101}^{98} + 3^{50} C_{101}^{100}.$$

Решение. Рассмотрим комплексное число $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Воспользовавшись формулой бинома Ньютона[1], можно записать:

$$(1 + \sqrt{3}i)^{101} = 1 + C_{101}^1 \sqrt{3}i + C_{101}^2 (\sqrt{3}i)^2 + \ldots + C_{101}^{100} (\sqrt{3}i)^{100} + (\sqrt{3}i)^{101}.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{3}i)^{101} &= 1 + \sqrt{3}C_{101}^1 i - 3C_{101}^2 - \ldots + 3^{50} C_{101}^{100} + (\sqrt{3})^{101} i = \\ &= \left(1 - 3C_{101}^2 + 3^2 C_{101}^4 + \ldots - 3^{49} C_{101}^{98} + 3^{50} C_{101}^{100}\right) + \\ &+ \left(\sqrt{3}C_{101}^1 - (\sqrt{3})^3 C_{101}^3 + \ldots - (\sqrt{3})^{99} C_{101}^{99} + (\sqrt{3})^{101}\right) i.\end{aligned}$$

Теперь понятно, что значение суммы S равно действительной части комплексного числа $(1 + \sqrt{3}i)^{101}$.

Поскольку $1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, то получаем:

[1] Те, кто не знакомы с этой формулой, смогут ознакомиться с ней в § 17.

$$(1+\sqrt{3}i)^{101} = 2^{101}\left(\cos\frac{101\pi}{3} + i\sin\frac{101\pi}{3}\right) = 2^{101}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{100} - 2^{100}\sqrt{3}i.$$

Таким образом, значение данного выражения равно 2^{100}.

Ответ: 2^{100}. ■

Заметим, что при решении примера 1 мы получили и такое равенство:

$$\sqrt{3}C_{101}^{1} - (\sqrt{3})^3 C_{101}^{3} + \ldots - (\sqrt{3})^{99} C_{101}^{99} + (\sqrt{3})^{101} = -2^{100}\sqrt{3}.$$

Пример 2. Выразите $\sin 5\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Решение. Рассмотрим комплексное число $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Используя формулы Муавра и бинома Ньютона, представим число z^5 двумя способами:

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 = \cos 5\alpha + i\sin 5\alpha;$$

$$\begin{aligned}(\cos\alpha + i\sin\alpha)^5 &= \cos^5\alpha + 5\cos^4\alpha(i\sin\alpha) + 10\cos^3\alpha(i\sin\alpha)^2 + \\ &+ 10\cos^2\alpha(i\sin\alpha)^3 + 5\cos\alpha(i\sin\alpha)^4 + (i\sin\alpha)^5 = \\ &= (\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha) + \\ &+ (5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha)\, i.\end{aligned}$$

Осталось приравнять мнимые части полученных выражений.

Ответ: $\sin 5\alpha = 5\cos^4\alpha\sin\alpha - 10\cos^2\alpha\sin^3\alpha + \sin^5\alpha$. ■

Заметим, что при решении примера 2 мы получили и такой результат: $\cos 5\alpha = \cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha\sin^2\alpha + 5\cos\alpha\sin^4\alpha$.

Пример 3. Существуют ли такие натуральные числа $x \geqslant 15$ и $y \geqslant 15$, что $x^2 + y^2 = 29 \cdot 41$?

Решение. Представим произведение $29 \cdot 41$ в виде

$$29 \cdot 41 = |5+2i|^2 \cdot |5+4i|^2.$$

Воспользовавшись равенством $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$, получим:

$$29 \cdot 41 = |5+2i|^2 \cdot |5+4i|^2 = |(5+2i)(5+4i)|^2 = |17+30i|^2 = 17^2 + 30^2.$$

Ответ: Да, например, $x = 17$, $y = 30$. ■

Пример 4. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABDE$ и $CBLK$. Точки M_1 и M_2 — середины отрезков LD и CA соответственно. Докажите, что центры квадратов и точки M_1 и M_2 являются вершинами квадрата.

Решение. Введём комплексную плоскость так, чтобы точка B совпала с началом координат (рис. 15.5). Обозначим через O_1 и O_2 центры квадратов $ABDE$ и $CBLK$ соответственно. Пусть a и c — комплексные координаты точек A и C соответственно. Заметим, что точка D является образом точки A при повороте с центром B на угол $\frac{\pi}{2}$, а точка L — образом точки C при повороте с центром B на угол $-\frac{\pi}{2}$. Тогда комплексные координаты точек D и L равны числам ia и $-ic$ соответственно.

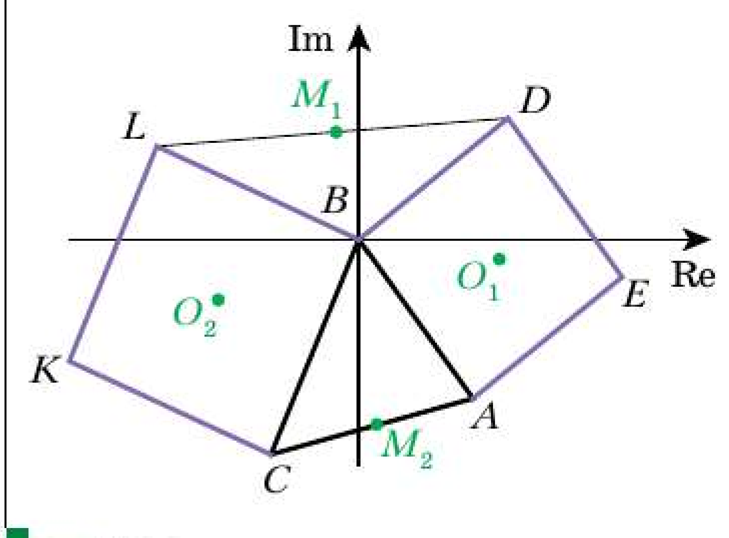


Рис. **15.5**

Найдём комплексные координаты z_{O_1}, z_{O_2} и z_{M_2} точек O_1, O_2 и M_2. Поскольку эти точки являются серединами отрезков AD, CL и AC соответственно, то $z_{O_1} = \frac{a+ia}{2}$, $z_{O_2} = \frac{c-ic}{2}$, $z_{M_2} = \frac{a+c}{2}$.

Покажем, что точка M_2 — вершина равнобедренного прямоугольного треугольника $O_1M_2O_2$. Для этого достаточно убедиться, что при повороте с центром M_2 на угол $\frac{\pi}{2}$ вектор $\overrightarrow{M_2O_2}$ является образом вектора $\overrightarrow{M_2O_1}$. Иными словами, достаточно проверить равенство $i\overrightarrow{M_2O_1} = \overrightarrow{M_2O_2}$, то есть $i(z_{O_1} - z_{M_2}) = z_{O_2} - z_{M_2}$.

Имеем: $i(z_{O_1} - z_{M_2}) = i\left(\frac{a+ia}{2} - \frac{a+c}{2}\right) = \frac{i(ia-c)}{2} = \frac{-a-ic}{2}$;

$$z_{O_2} - z_{M_2} = \frac{c-ic}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{-a-ic}{2}.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что M_1 — вершина равнобедренного прямоугольного треугольника $O_1M_1O_2$. ■

Пример 5. Есть две карты прямоугольной формы, изображающие одну и ту же местность, но имеющие разный масштаб. Меньшую карту положили так, что она оказалась целиком внутри большей карты. Докажите, что можно проткнуть иголкой одновременно обе карты так, что проколотые точки обеих карт будут изображать одну и ту же точку местности.

Решение. Введём комплексную плоскость так, чтобы одна из вершин большей карты совпала с началом координат, а стороны, содержащие эту вершину, принадлежали положительным полуосям.

Рассмотрим преобразование, в результате которого из большей карты можно получить меньшую карту, расположенную так, как показано на рисунке 15.6.

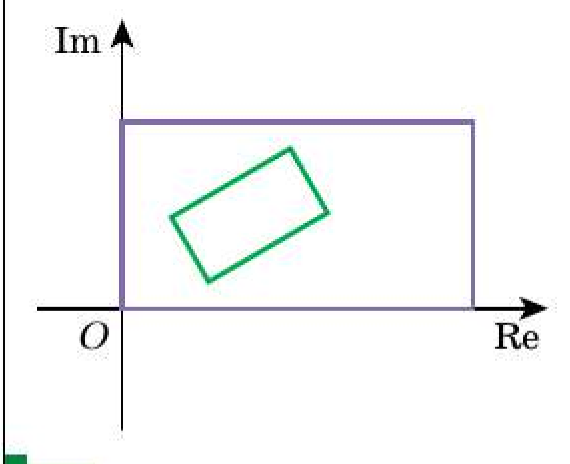


Рис. **15.6**

Пусть число r — отношение масштаба меньшей карты к масштабу большей карты. Понятно, что $r < 1$. Умножим комплексную координату z каждой точки плоскости на число $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Результат такого действия с точками плоскости можно рассматривать как композицию преобразований гомотетии H_O^r и поворота R_O^φ. Вследствие этого преобразования мы получили образ большей карты, равный меньшей карте и расположенный так, как показано на рисунке 15.7. Теперь перенесём этот образ «на соответствующее место» (рис. 15.8).

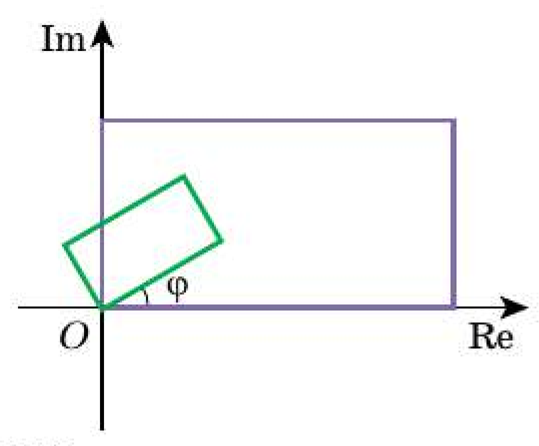


Рис. **15.7**

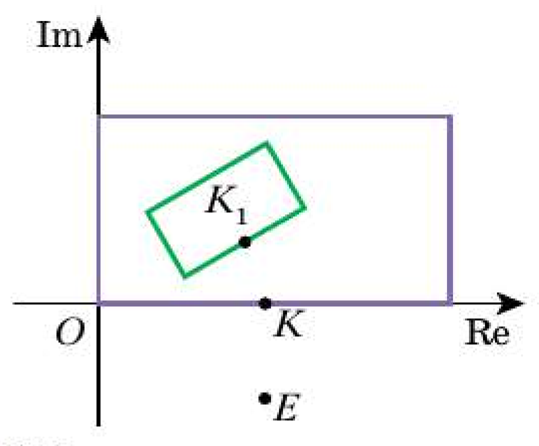


Рис. **15.8**

Для этого к комплексной координате az каждой точки плоскости прибавим комплексное число b. Результат такого действия можно рассматривать как параллельный перенос на вектор b.

Следовательно, в результате описанных преобразований каждая точка $M(z)$ большей карты имеет образ — точку $N(az + b)$ меньшей карты. Точки M и N совпадают, если выполняется равенство $z = az + b$. Поскольку $a \neq 1$, то это уравнение имеет единственный корень $z = \dfrac{b}{1-a}$.

Тем самым мы показали, что существует единственная точка $E\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ комплексной плоскости, которая в результате описанных преобразований оказалась «неподвижной». Теперь докажем, что эта «неподвижная точка» принадлежит обеим картам.

Каждая точка большей карты является прообразом некоторой точки меньшей карты. Поэтому точка E не может принадлежать большей карте и при этом не принадлежать меньшей карте.

Предположим, что точка E расположена вне большей карты. Рассмотрим точку K большей карты, которая наименее удалена от точки E, и её образ K_1 при описанных преобразованиях (см. рис. 15.8).

Заметим, что в результате гомотетии с коэффициентом r, где $0 < r < 1$, расстояние между образами любых двух точек меньше, чем расстояние между этими точками.

Тогда должно выполняться неравенство $KE > K_1E$, а это противоречит тому, как была выбрана точка K. ■

Упражнения

15.18. Выразите $\cos 6\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

15.19. Докажите равенство

$$\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \cos\frac{5\pi}{13} + \cos\frac{7\pi}{13} + \cos\frac{9\pi}{13} + \cos\frac{11\pi}{13} = \frac{1}{2}.$$

15.20. Докажите, что

$$\cos^{100}\varphi = \frac{1}{2^{99}}(\cos 100\varphi + C_{100}^{1}\cos 98\varphi + C_{100}^{2}\cos 96\varphi + \ldots + C_{100}^{50}).$$

15.21. Докажите, что

$$\sin^{100}\varphi = \frac{1}{2^{99}}(\cos 100\varphi - C_{100}^{1}\cos 98\varphi + C_{100}^{2}\cos 96\varphi - \ldots + C_{100}^{50}).$$

15.22. Докажите равенство $C_{51}^{0} - C_{51}^{2} + C_{51}^{4} - C_{51}^{6} + \ldots + C_{51}^{48} - C_{51}^{50} = -2^{25}$.

15.23. Найдите такие натуральные числа $x \geqslant 18$ и $y \geqslant 18$, что $x^2 + y^2 = 37 \cdot 53$.

15.24. На доске записаны функции $y = x + \frac{1}{x}$ и $y = x^2$. Если на доске записаны функции f и g, то разрешается дописать любую из функций $y = f^2(x)$, $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x)g(x)$, $y = cf(x)$, где c — произвольная действительная постоянная. Может ли в результате выполнения нескольких таких действий на доске появиться функция $y = \frac{1}{x}$?

15.25. В четырёхугольнике $ABCD$ точки M и N — середины сторон AB и CD соответственно. Точка K — середина отрезка MN. Медианы треугольника BCD пересекаются в точке P. Докажите, что точки A, K и P лежат на одной прямой.

15.26. Даны треугольник ABC и произвольная точка O. Пусть точки P, Q и R — соответственно точки пересечения медиан треугольников AOB, BOC и COA. Докажите, что точка O и точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR лежат на одной прямой.

15.27. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABNM$ и $ACQP$. Докажите, что $MC = BP$, $MC \perp BP$.

15.28. На сторонах BC и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники BCK и CAM. Найдите угол между прямыми BM и AK и докажите, что $BM = AK$.

15.29. На прямой l взяты последовательно точки A, B и C, а на отрезках AB и AC в различных полуплоскостях относительно прямой l построены равносторонние треугольники ABD и ACN. Докажите, что середины K и L соответственно отрезков DC и BN и точка A являются вершинами равностороннего треугольника.

15.30. На прямой l взяты последовательно точки A, C и E. На отрезках AC и CE в одной полуплоскости относительно прямой l построены равносторонние треугольники ABC и CDE. Точки K и M — середины отрезков AD и BE соответственно. Докажите, что треугольник CKM равносторонний.

15.31. Известно, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ — равносторонние (порядок вершин указан в направлении движения часовой стрелки). Середины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 являются вершинами треугольника. Докажите, что этот треугольник равносторонний.

§ 16 Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел

Вам хорошо известна формула корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \qquad (1)$$

При подстановке чисел $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ в уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ получим верное равенство. Если выполнить эту подстановку, то в левой части уравнения придётся выполнять только арифметические операции. Поскольку для действительных и комплексных чисел арифметические операции обладают общими свойствами, то на множестве комплексных чисел корни квадратного уравнения можно находить по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \Delta}{2a},$$

где в качестве Δ надо взять любое значение квадратного корня из дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Рассмотрим, например, квадратное уравнение $x^2 - 6x + 10 = 0$. Его дискриминант $D = 6^2 - 4 \cdot 10 = -4$ — отрицательное число. Легко установить, что числа $2i$ и $-2i$ — квадратные корни из дискриминанта. Таким образом, числа

$$x_1 = \frac{6 + 2i}{2} = 3 + i \text{ и } x_2 = \frac{6 - 2i}{2} = 3 - i$$

являются комплексными корнями данного квадратного уравнения.

Зная комплексные корни квадратного трёхчлена, его можно разложить на множители аналогично тому, как раскладывают трёхчлен, имеющий действительные корни. Например:

$$x^2 - 6x + 10 = (x - (3 + i))(x - (3 - i)).$$

Таким образом, каждый квадратный трёхчлен можно разложить на два линейных множителя. Поэтому каждое квадратное уравнение имеет не более двух комплексных корней.

Пример 1. Решите уравнение $z^2 - (9 + i)z + 20 = 0$.

Решение. Найдём дискриминант $D = (9 + i)^2 - 80 = 18i$. Квадратные корни из числа $18i = 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ равны:

$$\sqrt{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3 + 3i,$$

$$\sqrt{18}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -3 - 3i.$$

Теперь можно найти корни данного квадратного уравнения:

$$z_1 = \frac{9 + i + (3 + 3i)}{2} = 6 + 2i, \quad z_2 = \frac{9 + i - (3 + 3i)}{2} = 3 - i.$$

Ответ: $6 + 2i$; $3 - i$. ■

Пример 2. Решите уравнение $z^2 - (3 + 2i)z + (5 + i) = 0$.

Решение. Найдём дискриминант: $D = (3 + 2i)^2 - 4(5 + i) = -15 + 8i$. В данном случае поиск квадратных корней из $D = -15 + 8i$, записанных в тригонометрической форме, нецелесообразен, поскольку аргумент комплексного числа $-15 + 8i$ — «неудобный» угол. Вычислим квадратные корни $\Delta = x + yi$ из дискриминанта в алгебраической форме.

Имеем:

$$\Delta^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi = -15 + 8i.$$

Отсюда $\begin{cases} x^2 - y^2 = -15, \\ 2xy = 8. \end{cases}$

Решив эту систему, получим значения квадратных корней из дискриминанта: $1 + 4i$, $-1 - 4i$.

Теперь можно найти корни данного квадратного уравнения:

$$z_1 = \frac{(3 + 2i) + (1 + 4i)}{2} = 2 + 3i, \quad z_2 = \frac{(3 + 2i) - (1 + 4i)}{2} = 1 - i.$$

Ответ: $2 + 3i$; $1 - i$. ■

Введение в рассмотрение комплексных чисел привело к тому, что любое квадратное уравнение имеет корень. Этот факт является частным случаем основной теоремы алгебры — одной из жемчужин математики.

Теорема 16.1

(основная теорема алгебры)

Каждый многочлен

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степени $n \in N$ с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Согласно этой теореме любое алгебраическое уравнение, например

$$x^6 - x + 2 = 0,$$

имеет комплексный корень.

Следствие

Каждый многочлен

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

степени $n \in N$ с комплексными коэффициентами можно единственным способом представить в виде произведения линейных множителей

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Числа z_1, z_2, ..., z_n, среди которых могут быть равные, являются корнями многочлена P. Каждый корень многочлена P равен одному из этих чисел.

Доказательство

По основной теореме алгебры многочлен P имеет комплексный корень — число z_1. Поэтому по теореме Безу многочлен P можно представить в виде:

$$P(z) = (z - z_1)Q(z),$$

где многочлен Q имеет вид:

$$Q(z) = z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \ldots + b_1 z + b_0.$$

Если степень многочлена Q — число натуральное, то, применяя основную теорему алгебры к многочлену Q, представим его в виде:

$$Q(z) = (z - z_2)R(z),$$

где z_2 — корень многочлена Q. Тогда многочлен P можно представить в виде:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)R(z).$$

Продолжая этот процесс далее, получим, что многочлен P можно представить в виде:

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n). \qquad (2)$$

Понятно, что каждое из чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$ является корнем многочлена P. При этом каждый корень многочлена P равен одному из чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Действительно, если некоторое число z^* является корнем многочлена P, то, подставляя значение $z = z^*$ в равенство (2) и учитывая, что $P(z^*) = 0$, получаем:

$$(z^* - z_1)(z^* - z_2)\ldots(z^* - z_n) = 0.$$

Это означает, что z^* равно одному из чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Единственность представления многочлена P в виде произведения (2) докажите самостоятельно. ■

Вы знакомы с теоремой Виета для действительных корней квадратного трёхчлена с действительными коэффициентами. В силу общих свойств операций над комплексными и действительными числами понятно, что теорема Виета справедлива и для комплексных корней квадратного трёхчлена с комплексными коэффициентами.

Рассмотрим теорему Виета для многочлена третьей степени.

Теорема 16.2

(теорема Виета)

Комплексные числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями многочлена с комплексными коэффициентами

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0,$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a}. \end{cases} \qquad (3)$$

Доказательство

Если числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями многочлена P, то многочлен P можно представить в виде произведения

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

В правой части последнего равенства раскроем скобки. Имеем:
$P(x) = ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3.$

Поскольку многочлены

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{4}$$

и

$$ax^3 - a(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - ax_1x_2x_3 \tag{5}$$

принимают одинаковые значения при всех значениях x, то их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x совпадают. Поэтому

$$\begin{cases} -a(x_1 + x_2 + x_3) = b, \\ a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = c, \\ -ax_1x_2x_3 = d. \end{cases}$$

Отсюда следуют равенства системы (3).

Наоборот, если выполняются равенства системы (3), то у многочленов (4) и (5) равны соответствующие коэффициенты, поэтому эти многочлены равны при всех значениях x. Поскольку многочлен (5) можно переписать в виде:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

то имеем:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Это означает, что числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями многочлена P. ■

Теорему Виета можно обобщить для многочленов, степень которых больше трёх. Если вы хотите об этом узнать больше, то советуем принять участие в работе над проектом «Теорема Виета и симметрические многочлены» (с. 367).

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 11, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 27. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим многочлен $P(t) = t^3 + pt^2 + qt + r$ с корнями x, y и z.

По теореме Виета $p = -(x + y + z) = -3$.

Поскольку $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)$, то

$$9 = 11 + 2(xy + xz + yz). \text{ Отсюда}$$

$$q = xy + xz + yz = -1.$$

Поэтому многочлен P можно записать так:

$$P(t) = t^3 - 3t^2 - t + r.$$

Найдём коэффициент r. Поскольку числа x, y и z являются корнями многочлена P, то

$$x^3 - 3x^2 - x + r = 0,$$
$$y^3 - 3y^2 - y + r = 0,$$
$$z^3 - 3z^2 - z + r = 0.$$

Сложив три последних равенства, получим:

$$(x^3 + y^3 + z^3) - 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z) + 3r = 0.$$

Отсюда, используя условие задачи, имеем:

$$27 - 3 \cdot 11 - 3 + 3r = 0; \; r = 3.$$

Таким образом,

$$P(t) = t^3 - 3t^2 - t + 3.$$

Раскладывая многочлен P на множители, получаем, что

$$P(t) = t^2(t - 3) - (t - 3) = (t - 3)(t^2 - 1) = (t - 3)(t - 1)(t + 1).$$

Следовательно, корнями многочлена являются числа 3, 1 и –1.

Ответ: (3; 1; –1), (1; 3; –1), (1; –1; 3), (3; –1; 1), (–1; 1; 3), (–1; 3; 1). ■

1. Сформулируйте основную теорему алгебры.

2. Сформулируйте следствие из основной теоремы алгебры.

3. Сформулируйте теорему Виета для многочлена третьей степени.

Упражнения

16.1. Решите уравнение:

1) $z^2 + 8z + 25 = 0$;
2) $z^2 - (3 - 2i)z + 10 = 0$;
3) $z^2 - 3z + 11 - 3i = 0$;
4) $z^2 + (i - 5)z + 8 - i = 0$.

16.2. Решите уравнение:

1) $z^2 - 10z + 41 = 0$;
2) $z^2 + 2(i - 6)z + 30 = 0$;
3) $z^2 - 2z - 7 - 6i = 0$;
4) $z^2 + 2(i - 2)z + 3 + 4i = 0$.

16.3. Решите уравнение:

1) $z^4 + 15z^2 - 16 = 0$;
2) $z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$;
3) $z^4 + 1 = 0$;
4) $z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 2i = 0$.

16.4. Решите уравнение:

1) $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$;
2) $z^3 + 3z^2 + 9z + 27 = 0$;
3) $z^4 + 9 = 0$;
4) $z^3 - (4 - i)z^2 + (7 - i)z - 4 = 0$.

16.5. Три комплексных числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями уравнения $5x^3 + px^2 + 15x - 40 = 0$. Найдите $x_1 + x_2$, если $x_3 = 25$.

16.6. Три комплексных числа x_1, x_2 и x_3 являются корнями уравнения $x^3 + 29x^2 - 6x + q = 0$. Найдите x_1x_2, если $x_3 = -31$.

16.7. Корнями многочлена $x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = 0$ являются три комплексных числа x_1, x_2 и x_3. Составьте кубическое уравнение, корни которого $3x_1$, $3x_2$ и $3x_3$.

16.8. Корнями многочлена $x^3 - x^2 + 4x - 1 = 0$ являются три комплексных числа x_1, x_2 и x_3. Составьте кубическое уравнение, корни которого x_1^2, x_2^2 и x_3^2.

16.9. Корнями многочлена $x^3 - 2x^2 + 3x - 4 = 0$ являются три комплексных числа x_1, x_2 и x_3. Составьте кубическое уравнение, корни которого $x_1 + x_2$, $x_1 + x_3$ и $x_2 + x_3$.

16.10. Решите уравнение $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0$.

16.11. Решите уравнение $z^8 - z^6 + z^4 - z^2 + 1 = 0$.

16.12. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^{120} + 2x^{65} + 2$ на трёхчлен $x^2 - x + 1$.

16.13. Найдите остаток от деления многочлена $P(x) = x^{200} - x^{101} + 5$ на двучлен $x^2 + 1$.

16.14. Докажите, что если комплексное число z_0 является корнем многочлена P с действительными коэффициентами, то комплексное число $\overline{z}_0$ также является корнем многочлена P.

16.15. Известно, что число $z = 1 + i$ является корнем уравнения $z^4 - 5z^3 + 13z^2 - 16z + 10 = 0$. Решите это уравнение.

16.16. Решите систему уравнений в действительных числах:

1) $\begin{cases} xyz = -6, \\ xy + xz + yz = 1, \\ \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{yz} + \dfrac{1}{xz} = -\dfrac{2}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = -1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = -25, \\ xy + xz + yz = -5. \end{cases}$

16.17. Решите систему уравнений в действительных числах:

1) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ xy + xz + yz = -1, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

16.18. О действительных числах x, y и z известно, что $x + y + z$, $xy + xz + yz$ и xyz — рациональные числа. Можно ли гарантировать, что среди чисел x, y и z есть рациональные?

16.19. О числах x, y и z известно, что $(x + y + z) - 3(xy + xz + yz) + 9xyz = \frac{1}{3}$. Докажите, что по крайней мере одно из этих чисел равно $\frac{1}{3}$.

16.20. Докажите, что каждый многочлен P степени $n \in \boldsymbol{N}$ с действительными коэффициентами можно разложить на линейные или квадратичные множители с действительными коэффициентами.

16.21. Докажите, что каждый многочлен нечётной степени с действительными коэффициентами имеет действительный корень.

16.22. Существует ли функция, график которой имеет общую точку с любой параболой вида $y = ax^2 + bx + c$?

16.23. О действительных числах x, y и z известно, что $x + y + z = 5$, $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Докажите, что $4 \leqslant xyz \leqslant \frac{112}{27}$.

16.24. Целые числа a, b и c таковы, что каждое из чисел $a + b + c$ и $a^2 + b^2 + c^2$ делится нацело на нечётное число n. Докажите, что число $a^5 + b^5 + c^5$ также делится нацело на число n.

16.25. Сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 1. Докажите, что

$$ab + bc + ca - 2abc \leqslant \frac{7}{27}.$$

глава

4 Элементы теории вероятностей

- В этой главе вы продолжите изучение элементов теории вероятностей. Изучите новые формулы для вычисления вероятностей событий, узнаете, какие события называют независимыми, познакомитесь со случайными величинами и их характеристиками, получите представление о законе больших чисел.
- Вы научитесь находить вероятность события при условии, что произошло другое событие, сможете использовать новую вероятностную модель — схему Бернулли для вычисления вероятностных характеристик разнообразных испытаний, узнаете, как на основе выводов теории вероятностей можно принимать решения в жизненных ситуациях.

§ 17 Элементы комбинаторики и бином Ньютона

Вам уже знакомы основные правила комбинаторики, вы узнаете, что такое перестановки, размещения и сочетания (комбинации), и изучили формулы для их вычисления. Напомним основные определения и формулы.

Определение

Перестановкой конечного множества M называют любое упорядоченное множество, образованное из всех элементов множества M.

Например, существует 6 перестановок множества $M = \{a, b, c\}$:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Количество перестановок n-элементного множества обозначают P_n. Для любого $n \in N \cup \{0\}$ справедлива формула

$$\boxed{P_n = n!}$$

Определение

Любое k-элементное упорядоченное подмножество данного n-элементного множества называют размещением из n элементов по k элементов.

Например, если $M = \{a, b, c\}$, то существует 6 размещений из 3 элементов по 2 элемента:

$$(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).$$

Количество размещений из n элементов по k элементов обозначают A_n^k.

Для любых чисел $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ и $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, где $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Определение

Любое k-элементное подмножество заданного n-элементного множества называют сочетанием (комбинацией) из n элементов по k элементов.

Например, если $M = \{a, b, c, d\}$, то существует 6 комбинаций из 4 элементов по 2 элемента:

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

Количество сочетаний из n элементов по k элементов обозначают C_n^k.

Для любых чисел $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ и $k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, где $k \leqslant n$, справедлива формула

$$\boxed{C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}}$$

Перестановки, размещения и сочетания применяют при решении многих задач. Один из таких примеров — задача нахождения формулы сокращённого умножения для выражения $(a + b)^n$.

Формулы сокращённого умножения для случаев, когда показатель степени n принимает значения 2 и 3, вам хорошо известны. Найдём формулу для общего случая $n \in \boldsymbol{N}$.

Выражение $(a + b)^n$ является произведением n одинаковых множителей $(a + b)$.

В произведении

$$\underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ множителей}} \qquad (1)$$

раскроем все скобки сразу. Для этого в каждой из n скобок $(a + b)$ необходимо выбрать переменную a или b, перемножить выбранные переменные и сложить все такие произведения.

Например, если во всех скобках выбрать переменную a:

$$(a + b)(a + b)(a + b)\ldots(a + b),$$

то получим выражение a^n, являющееся одним из слагаемых суммы, которая получается после раскрытия скобок в произведении (1). Если в первом множителе $(a + b)$ произведения (1) выбрать переменную b, а во всех остальных — переменную a:

$$(a + b)(a + b)(a + b)...(a + b),$$

то получим слагаемое $a^{n-1}b$. Заметим, что слагаемое $a^{n-1}b$ можно получить и другими способами, например, выбирая из второго множителя переменную b и из остальных — переменную a:

$$(a + b)(a + b)(a + b)...(a + b).$$

Вообще, если в k множителях $(a + b)$ произведения (1) выбрать переменную b, а в остальных $(n - k)$ множителях выбрать переменную a, то получим слагаемое вида $a^{n-k}b^k$, где $0 \leqslant k \leqslant n$.

Таким образом, после раскрытия скобок каждое слагаемое суммы будет иметь вид $a^{n-k}b^k$, где $0 \leqslant k \leqslant n$. Выясним, сколько существует подобных слагаемых для каждого из значений $k = 0$, $k = 1$, ..., $k = n$.

Среди n множителей $(a + b)$ выбрать k множителей (для выбора в них переменной b) можно C_n^k способами. Поэтому в полученной сумме количество слагаемых вида $a^{n-k}b^k$ будет равным C_n^k.

Таким образом, после раскрытия скобок выражение $(a + b)^n$ можно представить в виде суммы

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 + ... + C_n^{n-1}a^1b^{n-1} + b^n}$$

Полученную формулу называют **формулой бинома Ньютона**, а коэффициенты C_n^k — **биномиальными коэффициентами.**

Заметим, что в формуле бинома Ньютона выражение $(a + b)^n$ представлено как сумма $n + 1$ слагаемого, где $(k + 1)$-е слагаемое имеет вид:

$$\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$$

Если в формуле бинома Ньютона знак переменной b заменить на противоположный, то получим формулу

$$\boxed{(a-b)^n = a^n - C_n^1a^{n-1}b^1 + C_n^2a^{n-2}b^2 - C_n^3a^{n-3}b^3 + ... + (-1)^n b^n}$$

Пример 1. Раскройте скобки в выражении $(a + b)^5$.

Решение. Поскольку $C_5^1 = 5$, $C_5^2 = 10$, $C_5^3 = 10$, $C_5^4 = 5$, то можно записать:

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5. \blacksquare$$

Пример 2. Выражение $\left(\dfrac{5}{\sqrt[4]{x^3}} + 2x^3\right)^{40}$ разложили по формуле бинома Ньютона. Какой член разложения не зависит от x?

Решение. Запишем $(k+1)$-й член разложения

$$T_{k+1} = C_{40}^{k}\left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}\right)^{40-k}(2x^3)^k = C_{40}^{k}5^{40-k}2^k x^{-\frac{3}{4}(40-k)+3k}.$$

Слагаемое T_{k+1} не будет зависеть от x, если $-\frac{3}{4}(40-k)+3k=0$. Отсюда $k=8$ и $T_9 = C_{40}^{8}5^{32}2^8$.

Ответ: $T_9 = C_{40}^{8}5^{32}2^8$. ■

Используя формулу бинома Ньютона, запишем разложения выражений $(a+b)^n$, где $n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, в такой форме:

$(a+b)^0$: 1

$(a+b)^1$: $1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1$

$(a+b)^2$: $1 \cdot a^2 + 2 \cdot a^1b^1 + 1 \cdot b^2$

$(a+b)^3$: $1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2b^1 + 3 \cdot a^1b^2 + 1 \cdot b^3$

$(a+b)^4$: $1 \cdot a^4 + 4 \cdot a^3b^1 + 6 \cdot a^2b^2 + 4 \cdot a^1b^3 + 1 \cdot b^4$

$(a+b)^5$: $1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b^1 + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot a^1b^4 + 1 \cdot b^5$

....

Записанные в треугольную таблицу биномиальные коэффициенты (они выделены красным цветом) обладают многими интересными свойствами. Например, можно увидеть, что, сложив два соседних «красных» числа, получим «красное» число, записанное в следующей строке между двумя данными числами (рис. 17.1).

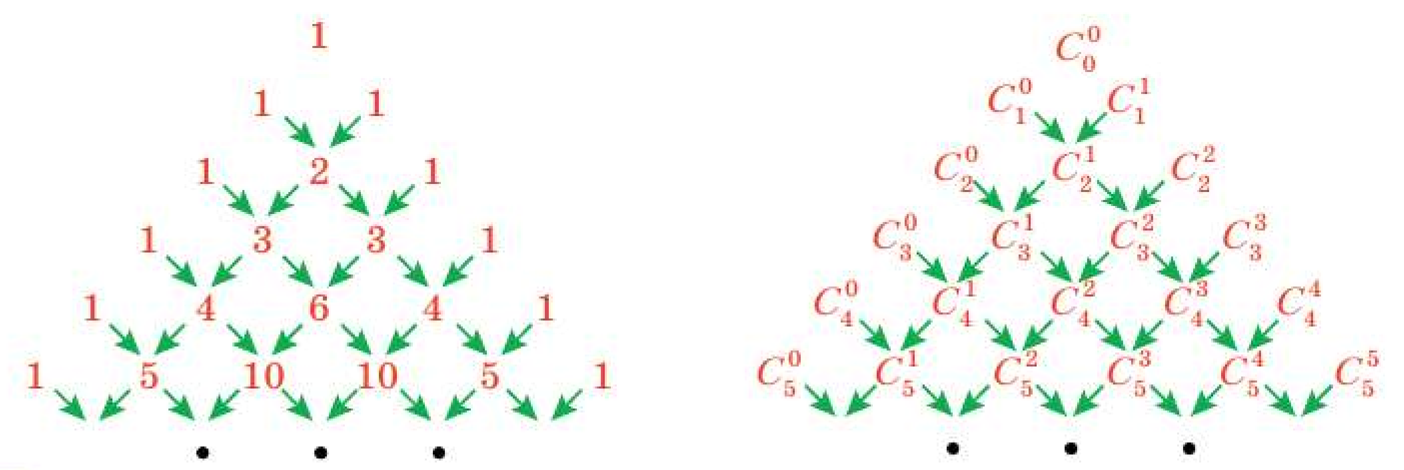


Рис. 17.1

Это свойство следует из равенства $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, которое вы рассматривали в 9 классе.

Таблицу, изображённую на рисунке 17.1, называют **треугольником Паскаля** в честь французского математика Блеза Паскаля, который написал подробный трактат об этой треугольной таблице чисел.

Блез Паскаль (1623–1662)

Французский математик, физик, литератор и философ. Один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проективной геометрии. Создал первые образцы вычислительной техники.

Пример 3. Докажите[1], что сумма чисел в каждой строке треугольника Паскаля является степенью числа 2.

Решение. В формулу бинома Ньютона

$$1 \cdot a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b^1 + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot a^1b^{n-1} + 1 \cdot b^n = (a+b)^n$$

подставим значения $a = b = 1$. Имеем:

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n.$$

Осталось только заметить, что $1, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}, 1$ являются числами одной строки треугольника Паскаля. ■

В треугольнике Паскаля кроется много интересных закономерностей. Например, если вместо нечётных чисел треугольника Паскаля поставить зелёную точку, а вместо чётных — пустое место (белую точку), то можно получить рисунок 17.2. Этот рисунок[2] можно выполнить, руководствуясь таким правилом: между точками одинакового цвета в следующей строке надо ставить белую точку, а между точками разного цвета — зелёную точку.

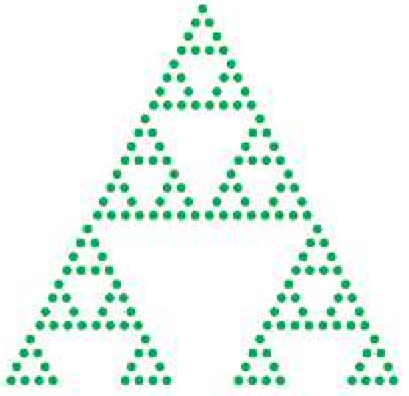


Рис. 17.2

[1] С другим доказательством этого свойства вы ознакомились в учебнике «Алгебра-8».

[2] Такие фигуры в математике называют *фракталами* (лат. *fractus* — измельчённый, дробный).

1. Что называют перестановкой конечного множества?
2. Что называют размещением n-элементного множества по k элементов?
3. Что называют сочетанием n-элементного множества по k элементов?
4. Какую формулу называют биномом Ньютона?
5. Сформулируйте свойства треугольника Паскаля и биномиальных коэффициентов.

Упражнения

17.1. Запишите все двузначные числа, образованные из цифр 1, 2, 3 и 4. Найдите количество таких чисел.

17.2. Запишите все трёхзначные числа, образованные из цифр 1, 2, 3 и 4, если цифры в числе не могут повторяться. Найдите количество таких чисел.

17.3. Запишите все четырёхзначные числа, образованные из цифр 1 или 2. Найдите количество таких чисел.

17.4. Запишите все трёхзначные числа, образованные из цифр 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры в числе не могут повторяться и должны быть расположены в порядке возрастания. Найдите количество таких чисел.

17.5. Запишите формулу бинома Ньютона для $(a + b)^6$.

17.6. Запишите формулу бинома Ньютона для $(a + b)^7$.

17.7. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(a + *)^4 = * + * + * + * + 16b^4$;

2) $(* + *)^5 = x^{10} + 10x^8 + * + * + * + *$.

17.8. Замените звёздочки такими одночленами, чтобы образовалось тождество:

1) $(* - 2n)^4 = m^4 - * + * - * + *$;

2) $(* + *)^5 = y^{15} + * + * + * + * + 32z^5$.

17.9. Вычислите количество слагаемых после раскрытия скобок в выражении $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{10})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{20})$.

17.10. Вычислите количество слагаемых после раскрытия скобок в выражении $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2)$.

17.11. Сколькими способами в таблице размером $n \times n$ можно выбрать n клеток так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце была одна выбранная клетка?

17.12. На плоскости отметили 10 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько различных ломаных с вершинами в данных точках можно построить, если ломаная должна проходить через каждую из десяти точек по одному разу?

17.13. Сколькими способами 30 учащихся могут сесть за 15 парт?

17.14. Руководство фирмы приобрело для своих сотрудников 6 туристических путёвок в разные страны. Сколькими способами эти путёвки можно распределить между 25 сотрудниками, если один сотрудник не может получить более одной путёвки?

17.15. В коробке лежат n карточек, на которых записаны числа от 1 до n. Из коробки надо последовательно выбрать пять карточек. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

17.16. На окружности отметили 25 точек. Сколько существует шестиугольников с вершинами в этих точках?

17.17. Среди всех стозначных последовательностей, составленных из нулей и единиц, найдите количество тех, в которых 40 единиц и 60 нулей.

17.18. Вычислите сумму $3^n + C_n^1 3^{n-1} 2^1 + C_n^2 3^{n-2} 2^2 + \ldots + C_n^{n-1} 3^1 2^{n-1} + 2^n$.

17.19. Вычислите сумму $C_{100}^0 - C_{100}^1 + C_{100}^2 - C_{100}^3 + \ldots + C_{100}^{100}$.

17.20. Вычислите сумму $2^{300} - C_{300}^1 2^{299} + C_{300}^2 2^{298} - C_{300}^3 2^{297} + \ldots - C_{300}^{299} 2 + 1$.

17.21. Докажите, что $1 + C_{100}^1 3 + C_{100}^2 3^2 + \ldots + C_{100}^{99} 3^{99} + 3^{100} = 5^{100} - C_{100}^1 5^{99} + C_{100}^2 5^{98} - \ldots - C_{100}^{99} 5 + 1$.

17.22. Докажите, что $1 + C_{100}^1 3 + C_{100}^2 3^2 + \ldots + C_{100}^{99} 3^{99} + 3^{100} = 1 - C_{200}^1 3 + C_{200}^2 3^2 - \ldots - C_{200}^{199} 3^{199} + 3^{200}$.

17.23. Найдите отношение суммы чисел в 20-й строке треугольника Паскаля к сумме чисел в 19-й строке.

17.24. Найдите отношение суммы чисел в 100-й строке треугольника Паскаля к сумме чисел в 200-й строке.

17.25. В выражении $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{3})^{100}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Какое количество полученных слагаемых являются рациональными?

17.26. В выражении $(\sqrt[3]{5} + \sqrt[4]{2})^{800}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Сколько рациональных слагаемых было получено?

17.27. При каком значении n восьмой член разложения выражения $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^2}\right)^n$ по формуле бинома Ньютона не зависит от x?

17.28. В выражении $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{22}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Какой член разложения можно представить в виде cx^2, где c — некоторая постоянная?

17.29. В выражении $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)^n$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Известно, что шестой член разложения имеет вид $56x^7$. Найдите n.

17.30. Сколькими способами можно разложить n разных шаров по трём различным ящикам (некоторые ящики могут остаться пустыми)?

17.31. Каждую клетку прямоугольника 3×5 можно покрасить в синий, жёлтый или красный цвет. Сколькими способами можно раскрасить прямоугольник?

17.32. Сколькими способами можно разложить 6 монет разного номинала по четырём отделениям кошелька?

17.33. Сколькими способами можно разложить n различных шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не остался пустым?

17.34. Сколькими способами можно разложить n различных шаров по трём одинаковым ящикам так, чтобы ни один ящик не остался пустым?

17.35. Сколькими способами можно разложить n различных шаров по трём одинаковым ящикам (некоторые ящики могут остаться пустыми)?

17.36. Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по трём различным ящикам (некоторые ящики могут остаться пустыми)?

17.37. Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не остался пустым?

17.38. Докажите, что суммы чисел треугольника Паскаля, стоящих на зелёных прямых (рис. 17.3), совпадают с числами Фибоначчи, т. е. с числами последовательности (u_n), заданной рекуррентно: $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, $n \in \boldsymbol{N}$.

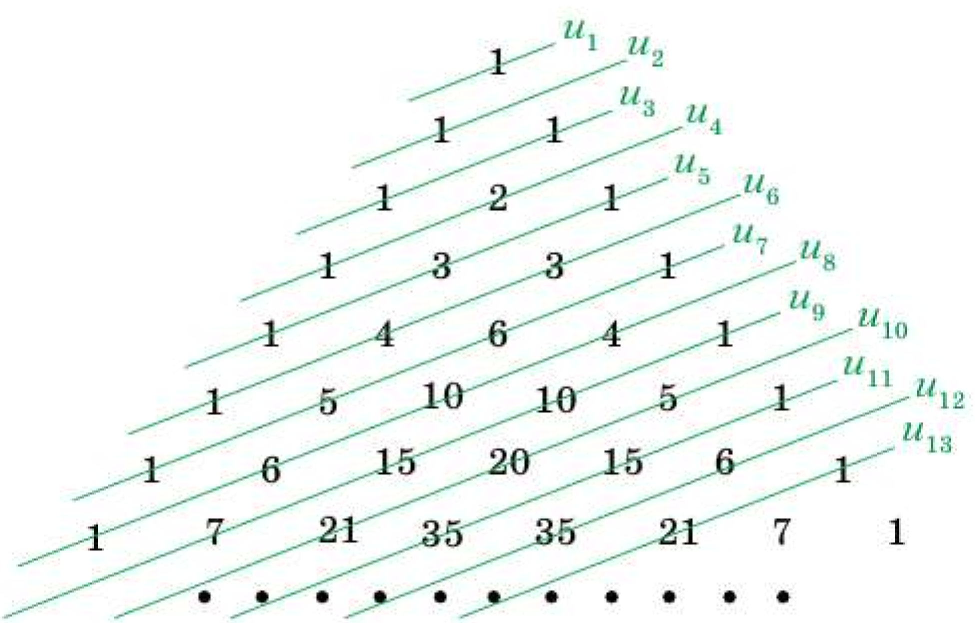


Рис. **17.3**

17.39. Пусть в треугольнике Паскаля выбрано некоторое число. Докажите, что сумма чисел треугольника Паскаля, расположенных параллельно стороне треугольника от выбранного числа до единицы (например, на рисунке 17.4 выбранным является число 10), равна числу, стоящему справа от данного в следующей строке (на рисунке 17.4 сумма фиолетовых чисел равна зелёному числу).

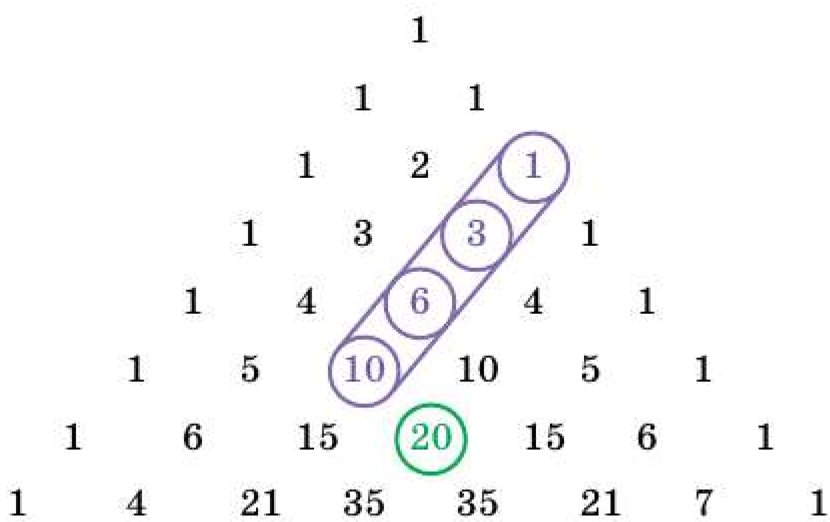


Рис. **17.4**

17.40. Объясните, почему значения выражений 11^2, 11^3 похожи на строки треугольника Паскаля. Вычислите 11^4.

17.41. Найдите количество нулей в конце десятичной записи значения выражения $1001^{1000} - 1$.

17.42. Найдите количество нулей в конце десятичной записи значения выражения $999^{1001} + 1$.

17.43. Вычислите суммы $A = C_{101}^1 + C_{101}^3 + C_{101}^5 + \ldots + C_{101}^{101}$ и $B = C_{101}^0 + C_{101}^2 + C_{101}^4 + \ldots + C_{101}^{100}$.

17.44. В выражении $(1+\sqrt{2})^{200}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона. Укажите наибольшее из слагаемых полученной суммы.

17.45. В выражении $(a + b)^{50}$ раскрыли скобки по формуле бинома Ньютона при $a = 2$, $b = -\sqrt{3}$. Укажите наименьшее из слагаемых полученной суммы.

17.46. Вычислите сумму $1C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n$.

17.47. Найдите первые 1000 цифр после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{50} + 7)^{1000}$.

«Игральный кубик подбросили трижды», «Из коробки с белыми и чёрными шарами наугад вытягивают один шар», «Стрелок стреляет по мишени дважды» и т. д. С таких слов, описывающих некий эксперимент, начинаются условия многих задач по теории вероятностей. И это неудивительно, ведь прежде чем отвечать на вопрос: «Чему равна вероятность?» — нам необходимо чётко представить эксперимент (ещё говорят: «случайный эксперимент»), в котором может возникнуть такой вопрос. Познакомимся подробнее с тем, как в теории вероятностей принято описывать и исследовать подобные эксперименты (опыты).

Характерной особенностью случайных экспериментов является то, что они оканчиваются **результатом**, ещё говорят — **элементарным исходом**, который нельзя предсказать заранее. Множество всех результатов эксперимента называют **пространством элементарных исходов** этого эксперимента и обозначают буквой Ω. В теории вероятностей рассматривают эксперименты, в которых Ω — непустое множество.

Например, если монету подбросить два раза и записать, что выпало на монете, то в таком опыте элементарными исходами будут записи:

ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ,

где буква «Г» означает, что на монете выпал герб, а буква «Ч» — что выпало число. Таким образом, в этом эксперименте пространство элементарных исходов состоит из четырёх элементов:

$$\Omega = \{\text{ГГ, ГЧ, ЧГ, ЧЧ}\}.$$

Ещё один пример. Если игральный кубик подбросить один раз и записать число, выпавшее на верхней грани кубика, то в таком эксперименте пространство элементарных исходов состоит из шести чисел:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Однако мы можем, подбрасывая игральный кубик, поступать и иначе, например фиксировать лишь факт выпадения шестёрки. Причины этого могут быть самыми разными. Например, на этом кубике можно распознать только шестёрку, поскольку числа на остальных гранях кубика стёрлись. В этом, вообще говоря, новом эксперименте речь идёт уже не о шести, а только о двух элементарных исходах:

«выпала шестёрка», «не выпала шестёрка»,

образующих двухэлементное пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{«выпала шестёрка», «не выпала шестёрка»}\}.$$

Когда мы изучаем случайный эксперимент, нас, помимо элементарных исходов, интересуют ещё и такие объекты, как *случайные события, являющиеся подмножествами пространства элементарных исходов* Ω. Приведём пример.

Для школьной лотереи выпущено 5 лотерейных билетов с серийными номерами от 1 до 5. Участник лотереи некоторым случайным образом выбирает один из этих билетов, вскрывает защитную плёнку и узнаёт серийный номер выбранного билета. Таким образом, речь идёт об опыте с пятью элементарными исходами и пространством элементарных исходов:

$$\Omega = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

Участвуя в какой-либо лотерее, мы, как правило, мало интересуемся серийным номером самим по себе (элементарным исходом испытания). Разговаривая с друзьями об участии в лотерее, мы скорее расскажем о выигрыше, чем будем обсуждать цифры серийного номера билета. Поэтому важнее узнать, является ли билет выигрышным.

Например, если по правилам рассматриваемой лотереи выигрышными являются билеты с чётными серийными номерами, то нас будет интересовать, попал ли наш серийный номер в множество

$$A = \{2,\ 4\}$$

выигрышных номеров, или же он является элементом множества

$$B = \{1,\ 3,\ 5\}$$

проигрышных номеров.

Иными словами, в этом эксперименте особую роль играют два подмножества: A (выбранный билет выиграл) и B (выбранный билет проиграл). А, например, подмножество $C = \{1,\ 2\}$ вряд ли представляет какой-либо интерес.

Таким образом, интересующие исследователя в той или иной задаче подмножества множества Ω называют **случайными событиями** (или просто **событиями**) изучаемого эксперимента.

Как вы знаете из курса алгебры 9 класса, в теории вероятностей каждому случайному событию X ставят в соответствие некоторое неотрицательное число $P(X)$, называемое **вероятностью случайного события** X.

К случайным событиям всегда относят множество Ω и пустое множество $\varnothing$. Таким образом, в любом эксперименте существует по крайней мере два случайных события. В конце этого параграфа мы подробнее поясним, как формируют множество случайных событий.

Вернёмся к опыту с лотерейным билетом. Понятно, что если участник вытянул выигрышный билет, т. е. билет с серийным номером 2 или 4, то произошло событие $A = \{2,\ 4\}$ — участник выиграл.

Вообще считают, что *в эксперименте произошло событие X, если элементарный исход ω, которым закончился эксперимент, является элементом множества X. В таком случае говорят, что элементарный исход ω* **благоприятствует событию** X.

Например, можно сказать, что любой элементарный исход благоприятствует событию Ω, т. е. событие Ω обязательно происходит. Поэтому Ω называют **достоверным событием**. И наоборот, нет ни одного исхода, благоприятствующего событию $\varnothing$, т. е. это событие никогда не происходит. Поэтому его называют **невозможным событием**.

Можно также сделать и такое заключение: в любом эксперименте события Ω и $\varnothing$ не могут произойти одновременно.

Определение

Если в некотором испытании два события не могут произойти одновременно, то их называют несовместными.

Другими словами, события A и B являются несовместными, если множества A и B не пересекаются.

Например, Ω и $\varnothing$ — несовместные события.

Рассмотрим более содержательный пример. Игральный кубик подбрасывают один раз. Результатом опыта является число, выпавшее на верхней грани. Поэтому $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. В этом испытании можно рассмотреть различные события, например такие:

A — «на кубике выпала тройка», т. е. $A = \{3\}$;

B — «на кубике выпало чётное число», т. е. $B = \{2, 4, 6\}$;

C — «на кубике выпало нечётное число», т. е. $C = \{1, 3, 5\}$.

Тогда события A и B являются несовместными, поскольку множества A и B не имеют общих элементов. События B и C также являются несовместными. Пару же событий A и C нельзя назвать несовместными, поскольку множества A и C имеют общий элемент — число 3. Это можно сказать и иначе. Если при подбрасывании на кубике выпадет тройка, то одновременно произойдёт и событие A, и событие C.

Приведём ещё один пример. Внутри прямоугольника $ABCD$ наугад выбирают точку, т. е. $\Omega = ABCD$. Пусть событие X состоит в том, что выбранная точка принадлежит кругу оранжевого цвета, а событие Y — в том, что выбранная точка принадлежит треугольнику фиолетового цвета (рис. 18.1).

Поскольку оранжевый круг не имеет общих точек с фиолетовым треугольником, то события X и Y являются несовместными.

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит хотя бы одно из двух событий A или B некоторого эксперимента, называют объединением событий A и B.

Можно сказать и так: множество $A \cup B$ называют объединением событий A и B.

Объединение событий является примером **операции над событиями**.

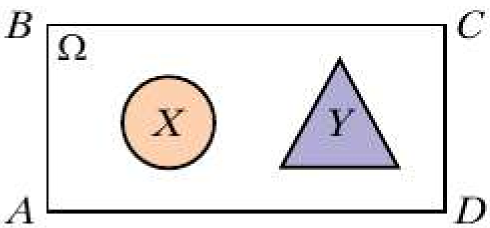


Рис. 18.1

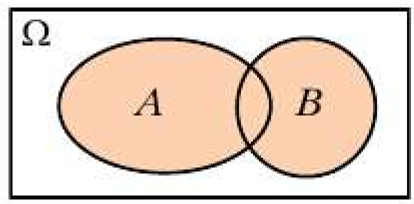


Рис. 18.2

Объединение двух событий проиллюстрировано на рисунке 18.2.

Рассмотрим в опыте с подбрасыванием игрального кубика такие события:

X — «на кубике выпало простое число», т. е. $X = \{2, 3, 5\}$;

Y — «на кубике выпало составное число», т. е. $Y = \{4, 6\}$;

Z — «на кубике выпало число, большее 1», т. е. $Z = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Тогда случайное событие Z является объединением случайных событий X и Y, т. е. $Z = X \cup Y$.

Аналогично определяют объединение трёх или большего количества событий.

Перейдём к изучению других операций над событиями.

Пусть в пенале у девочки лежат несколько цветных карандашей и ручек. Девочка наугад берёт один из этих предметов. В данном опыте рассмотрим следующие события:

X — «выбранный предмет пишет красным цветом»;

Y — «выбранный предмет — карандаш»;

Z — «выбранный предмет — красный карандаш».

Заметим, что событие Z происходит тогда и только тогда, когда одновременно происходит и событие X, и событие Y.

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда происходит и событие A, и событие B некоторого эксперимента, называют пересечением событий A и B.

Можно сказать и так: множество $A \cap B$ называют пересечением событий A и B.

В рассмотренном опыте с карандашами и ручками событие Z является пересечением событий X и Y, т. е. $Z = X \cap Y$.

На диаграмме (рис. 18.3) проиллюстрировано пересечение событий A и B.

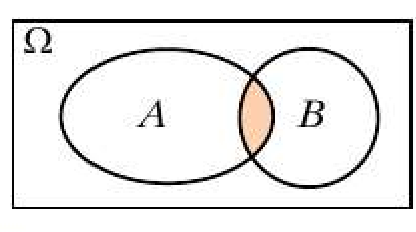


Рис. 18.3

Аналогично определяют пересечение трёх или большего количества событий.

Пусть A — событие некоторого испытания. Рассмотрим событие B, состоящее в том, что не произошло событие A. Например, в опыте с игральным кубиком рассмотрим событие A — «на кубике выпало чётное число». Тогда событие B — «на кубике выпало нечётное число».

Определение

Событие, которое происходит в том и только в том случае, когда не происходит событие A, называют дополнением события A.

Можно сказать и так: множество $\overline{A}$ называют дополнением события A.

В рассмотренном опыте с игральным кубиком событие B является дополнением события A, т. е. $B = \overline{A}$. Также можно сказать, что $A = \overline{B}$.

На рисунке 18.4 проиллюстрировано дополнение события A.

Используя операции объединения, пересечения и дополнения, можно определить другие операции со случайными событиями. Например, операцию **разности событий** A и B некоторого эксперимента (обозначают $A \setminus B$) определяют равенством $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Случайное событие $A \setminus B$ происходит только тогда, когда происходит событие A и одновременно не происходит событие B.

Разность случайных событий A и B проиллюстрирована на рисунке 18.5.

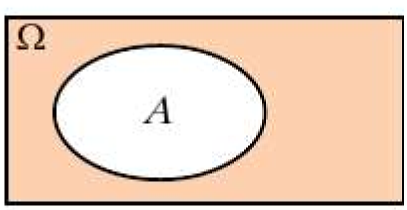


Рис. 18.4

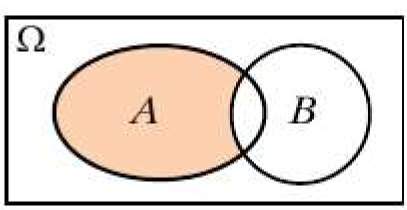


Рис. 18.5

Пример 1. В коробке лежат красные, синие и белые шары. Из коробки наугад вытягивают один шар. Событие A состоит в том, что вытянутый шар окажется красным, а событие B — в том, что он окажется синим. Найдите вероятность события $A \cup B$, если $P(A) = \frac{1}{2}$, а $P(B) = \frac{1}{3}$.

Решение. Событие $A \cup B$ состоит в том, что вытянутый наугад шар окажется или красным, или синим. Естественно предположить, что искомая вероятность будет равна сумме $P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Обоснуем это предположение. Пусть в коробке лежат n шаров, из которых a красных и b синих. Тогда вероятность события A равна $P(A)=\dfrac{a}{n}$. Аналогично вероятность события B равна $P(B)=\dfrac{b}{n}$.

События A и B несовместны. Поэтому исходы, благоприятствующие событию A, отличны от исходов, благоприятствующих событию B. Следовательно, событию $A \cup B$ благоприятствует $a+b$ исходов. Таким образом, вероятность того, что наугад вытянутый шар окажется или красным, или синим, равна

$$P(A \cup B)=\frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=P(A)+P(B)=\frac{5}{6}.$$

Ответ: $\dfrac{5}{6}$. ■

Решение примера 1 иллюстрирует следующее важное свойство вероятности.

Утверждение 1

Вероятность объединения двух несовместных событий A и B любого испытания может быть вычислена по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B)=P(A)+P(B)}} \qquad (1)$$

Например, используя равенство (1), можно доказать, что вероятность невозможного события $\varnothing$ в любом испытании равна нулю. Действительно, если $A=B=\varnothing$, то $A \cup B=\varnothing$. Поскольку рассматриваемые события A и B являются несовместными, то можно применить формулу (1). Получаем:

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing).$$

Откуда $P(\varnothing)=0$.

Найти вероятность достоверного события Ω, опираясь на равенство (1), невозможно. Поэтому следующее утверждение принимают без доказательства.

Утверждение 2

Вероятность достоверного события Ω равна 1.

Приведём пример ещё одного применения формулы (1).

Пусть A — некоторое событие. Поскольку объединение событий A и $\bar{A}$ равно достоверному событию, то $P(A \cup \bar{A})=1$. Учитывая тот факт, что события A и $\bar{A}$ несовместны, а также формулу (1), можно записать равенство

$$\boxed{\boldsymbol{P(A)+P(\bar{A})=1}} \qquad (2)$$

Это равенство используют, например, для вычисления вероятности дополнения события.

Обратите внимание, что, формулируя утверждение 1 и выводя формулу (2), мы неявно сделали следующие допущения.

- *Если A и B — случайные события некоторого испытания, то $A \cup B$ — также случайное событие.*
- *Если A — случайное событие некоторого испытания, то $\overline{A}$ — также случайное событие.*

Для того чтобы каждый раз не делать подобные оговорки, в теории вероятностей принято считать, что наборы случайных событий всегда удовлетворяют этим условиям и содержат достоверное событие Ω. Такой набор случайных событий ещё называют **алгеброй** событий.

Например, если пространство элементарных исходов конечное, то обычно к алгебре событий относят все подмножества пространства элементарных исходов.

Вообще, если при описании некоторого испытания указаны:

- *множество элементарных исходов,*
- *алгебра событий,*
- *вероятности всех случайных событий,*

то говорят, что задано **вероятностное пространство**, а утверждения 1 и 2 называют **аксиомами теории вероятностей.**

Так же как в курсе геометрии, аксиомы теории вероятностей используют для доказательства других более сложных утверждений — теорем.

Например, применяя аксиомы теории вероятностей, мы доказали равенство (2). Используя аксиомы и метод математической индукции, можно доказать, что если $A_1, A_2, ..., A_n$ — несовместные случайные события, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \qquad (3)$$

Докажем также следующую теорему.

Теорема 18.1

Если A и B — события некоторого испытания, то

$$\boxed{\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}} \qquad (4)$$

Доказательство

Рассмотрим такие случайные события:

$$C_1 = A \setminus B, \quad C_2 = B \setminus A, \quad C_3 = A \cap B.$$

Несложно убедиться (рис. 18.6), что эти события попарно несовместны и выполняется равенство

$$A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3.$$

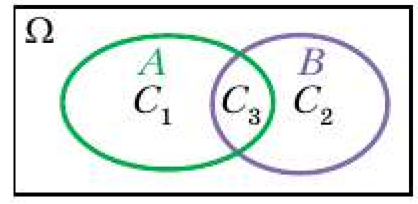


Рис. **18.6**

Используя равенство (3), получаем:

$$P(A \cup B) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3).$$

Отсюда

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(C_1) + P(C_2) + 2P(C_3). \qquad (5)$$

В то же время поскольку $A = C_1 \cup C_3$ и $B = C_2 \cup C_3$, то можно записать:

$$P(A) = P(C_1) + P(C_3) \text{ и } P(B) = P(C_2) + P(C_3).$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$P(A) + P(B) = P(C_1) + P(C_2) + 2P(C_3). \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) следует справедливость равенства (4). ■

Обратите внимание на то, что формула (4) является обобщением формулы (1). Действительно, если события A и B несовместны, то они никогда не происходят одновременно, поэтому $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0$.

Пример 2. Каждый слушатель курсов иностранных языков изучает или только английский язык, или только немецкий язык, или оба этих иностранных языка сразу. Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранный слушатель изучает английский язык, а событие B — в том, что наугад выбранный слушатель изучает немецкий язык. Какова вероятность того, что наугад выбранный слушатель изучает оба иностранных языка, если $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$?

Решение. Событие $A \cup B$ состоит в том, что наугад выбранный слушатель изучает английский или немецкий язык. Поскольку каждый слушатель курсов изучает хотя бы один иностранный язык, то событие $A \cup B$ является достоверным, т. е. равно Ω. Отсюда следует, что $P(A \cup B) = P(\Omega) = 1$. Используя формулу (4), получаем:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - 1 = \frac{3}{20}.$$

Отметим, что событие $A \cap B$ состоит в том, что наугад выбранный слушатель изучает и английский язык, и немецкий язык, т. е. изучает оба иностранных языка сразу.

Ответ: $\frac{3}{20}$. ■

1. Что называют пространством элементарных исходов эксперимента?
2. В каких случаях говорят, что элементарный исход благоприятствует событию?
3. Какое событие называют достоверным? Невозможным?
4. Какие события называют несовместными?
5. Какое событие называют объединением двух событий и как его обозначают?
6. Какое событие называют пересечением двух событий и как его обозначают?
7. Какое событие называют дополнением события и как его обозначают?
8. Какое событие называют разностью событий и как его обозначают?
9. Что называют алгеброй событий?
10. В каких случаях говорят, что задано вероятностное пространство?
11. Сформулируйте аксиомы теории вероятностей.
12. Как можно вычислить вероятность объединения двух событий?

Упражнения

18.1. В коробке лежат 7 синих и 5 красных карандашей. Опыт состоит в том, что из коробки наугад вытягивают один карандаш и фиксируют его цвет. Опишите элементарные исходы такого испытания.

18.2. Опыт состоит в том, что одновременно подбрасывают три монеты. Результатом опыта является количество гербов, выпавших при этом. Опишите элементарные исходы такого испытания.

18.3. В слове «МАТЕМАТИКА» наугад выбирают одну букву. Опишите пространство элементарных исходов этого опыта.

18.4. Опыт состоит в том, что одновременно подбрасывают два игральных кубика. Результатом опыта является сумма очков, выпавших на кубиках. Опишите пространство элементарных исходов этого испытания.

18.5. Болельщик следит за футбольным матчем и фиксирует его конечный результат. Опишите пространство элементарных исходов такого испытания.

18.6. Тренер наблюдает за результатом забега спортсмена на определённую дистанцию, фиксируя время забега. Опишите пространство элементарных исходов этого испытания.

18.7. Являются ли события A и B несовместными, если опыт состоит в том, что:

1) монету подбрасывают один раз, A — «выпал герб», B — «выпало число»;

2) игральный кубик подбрасывают два раза, A — «выпала единица при первом броске», B — «выпала шестёрка при втором броске»;
3) в мишень стреляют два раза, A — «в мишень попали дважды», B — «в мишень попали ровно один раз»?

18.8. Школьный библиотекарь берёт наугад один из учебников. Среди следующих событий найдите пары несовместных:
A — «взят учебник по математике»,
B — «взят учебник для 11 класса»,
C — «взят учебник по физике для 10 класса»,
D — «взят учебник, изданный до 2016 года»,
E — «взят учебник по гуманитарному предмету».

18.9. Шоколадное яйцо с сюрпризом содержит внутри игрушку либо для мальчика (машинку или фигурку пирата), либо для девочки (куклу или браслет). Событие A состоит в том, что выбранное наугад шоколадное яйцо с сюрпризом содержит игрушку для мальчика; событие B — в том, что шоколадное яйцо с сюрпризом содержит браслет. Укажите среди событий X, Y, Z, T событие:
1) $\bar{A}$, 2) $A \cup B$, 3) $A \setminus B$, где:
X — «шоколадное яйцо с сюрпризом содержит куклу»,
Y — «шоколадное яйцо с сюрпризом содержит игрушку для девочки»,
Z — «шоколадное яйцо с сюрпризом содержит машинку или фигурку пирата»,
T — «шоколадное яйцо с сюрпризом не содержит куклу».

18.10. Диаграмма (рис. 18.7) иллюстрирует событие A, состоящее в том, что наугад выбранный учащийся 11 «А» класса имеет светлые волосы. Каждая зелёная точка на диаграмме представляет учащегося. Найдите вероятность того, что наугад выбранный учащийся 11 «А» имеет: 1) светлые волосы; 2) тёмные волосы.

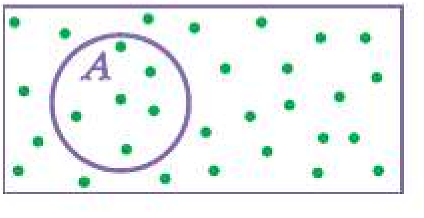


Рис. 18.7

18.11. Среди членов спортклуба выбирают наугад одного человека. Событие A состоит в том, что выбранный человек занимается в тренажёрном зале, а событие B — в том, что он плавает в бассейне. В чём состоит событие, проиллюстрированное на диаграмме (рис. 18.8)?

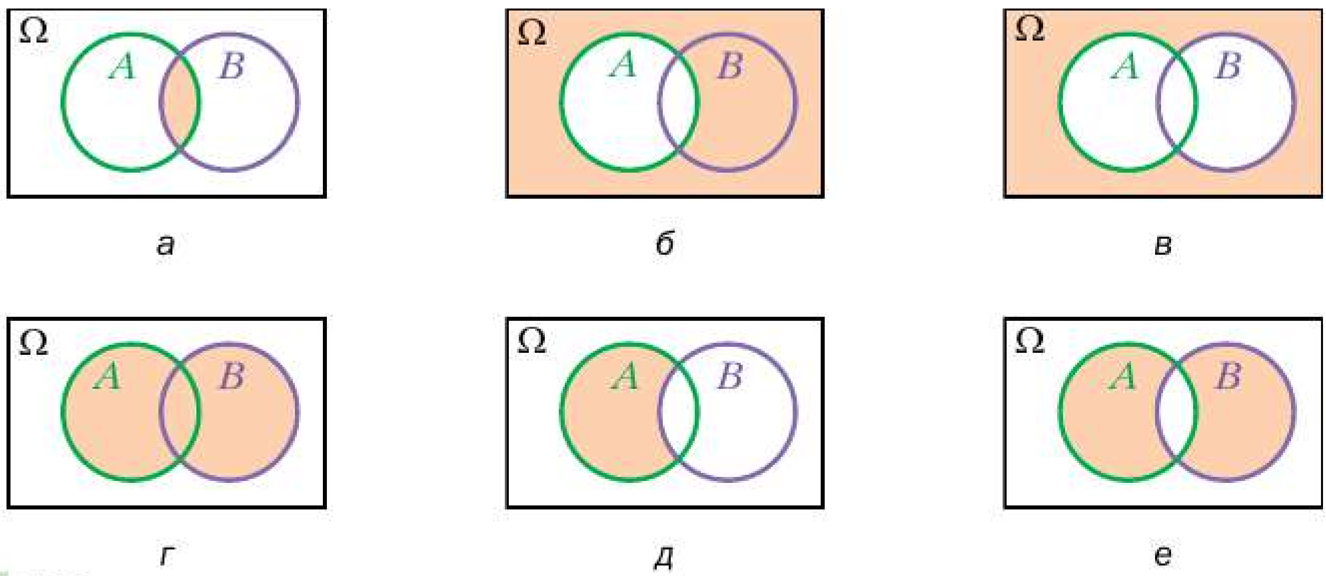


Рис. **18.8**

18.12. На диаграмме (рис. 18.9) проиллюстрированы события A и B. Перерисуйте диаграмму в тетрадь и заштрихуйте ту область, которая иллюстрирует следующее:

1) произошло событие A, но не произошло событие B;

2) произошло событие B, но не произошло событие A;

3) не произошло ни событие A, ни событие B.

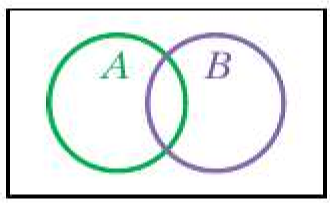


Рис. **18.9**

18.13. Опыт состоит в том, что из множества $U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ наугад выбирают один элемент. В этом опыте рассматривают следующие события:

A — выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 2\}$,
B — выбранный элемент принадлежит множеству $\{1, 3, 5\}$,
C — выбранный элемент принадлежит множеству $\{4, 5\}$.

Какой элемент мог быть выбран, если произошло событие:

1) $A \cap B$;
2) $B \cup C$;
3) $\overline{B}$;
4) $C \setminus A$;
5) $A \cup B \cup C$?

18.14. Опыт состоит в том, что наугад выбирают действительное число. В этом опыте рассматривают следующие события:

A — выбранное число принадлежит промежутку $[0; 2]$,
B — выбранное число принадлежит промежутку $(0; +\infty)$,
C — выбранное число принадлежит промежутку $[1; 3)$.

С помощью числовых промежутков запишите множество тех чисел, которые могли быть выбраны, если произошло событие:

1) $A \cup B$; 3) $\overline{B}$; 5) $A \cap B \cap C$.

2) $A \cap C$; 4) $A \setminus C$;

18.15. Событие A состоит в том, что наугад выбранный посетитель бассейна умеет плавать брассом, событие B — в том, что он умеет плавать на спине. На диаграмме (рис. 18.10) указано количество людей в той или иной группе. Найдите вероятность события:

1) A; 3) $A \cup B$; 5) $A \setminus B$;

2) $\overline{B}$; 4) $\overline{A} \cap \overline{B}$; 6) $A \setminus \overline{B}$.

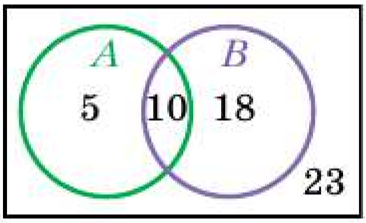


Рис. **18.10**

18.16. Используя условие предыдущей задачи, найдите вероятность события:

1) B; 3) $A \cap B$; 5) $B \setminus A$;

2) $\overline{A}$; 4) $\overline{A} \cup \overline{B}$; 6) $\overline{B} \setminus A$.

18.17. Стрелок делает два выстрела — сначала в большую мишень, а затем в маленькую. Вероятность того, что он попадёт только в большую мишень, равна 18 %. Вероятность того, что он попадёт только в маленькую мишень, равна 8 %. Найдите вероятность того, что, выстрелив дважды, стрелок попадёт в мишень только один раз.

18.18. Учащиеся 10 и 11 классов решили сыграть между собой один матч в футбол и один матч в баскетбол. Вероятность того, что сборная команда 10 класса выиграет у команды 11 класса только в футбол, равна 33 %, только в баскетбол — 18 %. Какова вероятность того, что сборная команда 10 класса выиграет ровно один из двух сыгранных матчей?

18.19. От остановки в центр города можно добраться на автобусе, на троллейбусе и на трамвае. Человек, едущий в центр города, садится на тот вид транспорта, который придёт на остановку первым. Известно, что автобус приходит первым с вероятностью $\frac{4}{7}$, троллейбус — $\frac{2}{7}$, трамвай — $\frac{1}{7}$. Какова вероятность того, что человек отправится в центр города не на трамвае?

18.20. В столовой предлагается три первых блюда — солянка, борщ и уха. Среди покупающих первое блюдо солянку в среднем выбирает каждый второй, борщ — каждый третий, а уху — каждый шестой посетитель столовой. Какова вероятность того, что очередной посетитель, купивший первое блюдо, не выберет борщ?

18.21. О событиях A и B некоторого испытания известно, что $P(A) = P(B) = 0$. Докажите, что:

1) $P(A \cap B) = 0$; 2) $P(A \setminus B) = 0$; 3) $P(A \cup B) = 0$.

18.22. Пусть A и B — события некоторого испытания. Известно, что $P(A) \geqslant 0,8$ и $P(B) \geqslant 0,8$. Докажите, что $P(A \cap B) \geqslant 0,6$.

18.23. О событиях A и B некоторого испытания известно, что $P(A) = P(B) = 1$. Докажите, что:

1) $P(A \cup B) = 1$; 2) $P(A \cap B) = 1$.

18.24. Игральный кубик подбросили дважды. Событие A состоит в том, что сумма очков, выпавших на кубике, чётная; событие B — в том, что по крайней мере один раз выпала единица. Найдите вероятность события:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $A \setminus B$.

18.25. Правильную треугольную пирамиду, грани которой окрашены в жёлтый, зелёный, красный и синий цвета, подбросили дважды. Пусть событие A состоит в том, что оба раза пирамида упала на одну и ту же грань; событие B состоит в том, что в первый раз пирамида упала на жёлтую или зелёную грань. Найдите вероятность события:

1) $\overline{A}$; 2) $A \cap B$; 3) $A \cup B$; 4) $B \setminus A$.

18.26. Мужья дарят жёнам подарки на 8 Марта. Вероятность того, что женщина получит в подарок цветы и не получит в подарок духи, равна 20 %, духи без цветов — 10 %, цветы и духи вместе — 15 %. Какова вероятность того, что женщина получит на 8 Марта в подарок: 1) цветы; 2) духи?

18.27. Гидрометцентр прогнозирует температуру и влажность воздуха на ближайшие дни. Вероятность того, что влажность повысится до 100 % или температура понизится на 5 °С, равна 85 %, а вероятность того, что и влажность повысится до 100 %, и температура понизится на 5 °С, — 40 %. Какова вероятность того, что в ближайшие дни температура воздуха понизится на 5 °С, если вероятность того, что влажность повысится до 100 %, равна 70 %?

18.28. Среди абитуриентов механико-математического факультета университета есть призёры областных олимпиад и отличники. Вероятность встретить среди абитуриентов призёра областной олимпиады равна 20 %, отличника — 35 %, а призёра областной олимпиады или отличника — 43 %. Какова вероятность встретить среди абитуриентов призёра областной олимпиады и отличника в одном лице?

18.29. Выпускник университета хочет работать в банке или в страховой компании. Побывав в этих учреждениях на собеседованиях, он оценивает вероятность быть принятым на работу в банк в 0,5, а в страховую компанию — в 0,6. Кроме того, он считает, что ему поступит предложение из обоих мест с вероятностью 0,4. Как он должен оценить вероятность быть принятым на работу?

18.30. Международные финансовые аналитики провели исследование и выяснили, что вероятность возрастания курса евро к доллару в следующем месяце составляет 0,55, вероятность возрастания курса швейцарского франка к доллару — 0,35, а вероятность того, что вырастут курсы обеих европейских валют к доллару, — 0,23. Найдите вероятность того, что вырастет курс по крайней мере одной европейской валюты.

18.31. В неисправной люстре поменяли на новые выключатель и лампочку. Вероятность того, что лампочка проработает не менее года, составляет 0,96, а выключатель — 0,98. Кроме того, известно, что с вероятностью 0,01 в течение года могут выйти из строя и лампа, и выключатель одновременно. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить:

1) только лампочку;
2) только выключатель;
3) лампочку или выключатель;
4) ровно один из двух новых элементов люстры?

18.32. Петя и Андрей пришли на озеро ловить рыбу. Вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом, у Пети равна $\frac{3}{5}$, а у Андрея — $\frac{1}{2}$. Вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом хотя бы у одного из мальчиков, равна $\frac{7}{10}$. Какова вероятность того, что первая пойманная рыба окажется карпом:

1) и у Пети, и у Андрея;
2) только у Пети;
3) только у Андрея;
4) только у одного из мальчиков?

18.33. Выпускники курсов иностранных языков изучали английский, немецкий и французский языки. Вероятность того, что наугад выбранный выпускник знает английский и немецкий языки, равна 0,6, немецкий и французский — 0,5, а английский и французский — 0,4. Может ли администрация курсов гарантировать, что в среднем каждый четвёртый выпускник знает все три языка?

§ 19 Условная вероятность

Рассмотрим опыт, состоящий в том, что игральный кубик подбрасывают дважды. На рисунке 19.1 показаны все 36 равновозможных результатов этого испытания. Пусть событие A состоит в том, что сумма чисел, выпавших на кубике при первом и втором бросках, равна 12. Событие A происходит только в одном случае — когда оба раза выпадут шестёрки. Поэтому $P(A) = \frac{1}{36}$.

Рис. 19.1

Поставим такой вопрос. Изменится ли вероятность события A, если известно, что при первом подбрасывании выпала шестёрка (состоялось событие B)? Опыт подсказывает, что вероятность события A должна измениться. Действительно, если при первом подбрасывании выпала шестёрка, то для наступления события A при втором подбрасывании тоже должна выпасть шестёрка. Вероятность выпадения шестёрки при втором подбрасывании равна $\frac{1}{6}$. Поэтому вероятность события A при условии выпадения шестёрки при первом броске (событие B) равна $\frac{1}{6}$. Это записывают так: $P_B(A) = \frac{1}{6}$ и называют **условной вероятностью**[1], т. е. вероятностью события A при условии, что произошло событие B.

Ввести строгое определение понятия условной вероятности нам помогут следующее примеры.

Пример 1. Из коробки, в которой лежат два зелёных и четыре фиолетовых шара, наугад берут сначала один шар, а потом ещё один. Событие A состоит в том, что первый взятый шар окажется зелёным, а событие B — в том, что второй взятый шар также окажется зелёным. Вычислите $P_A(B)$.

Решение. Если произошло событие A, то первый взятый шар — зелёный. Это значит, что перед вытягиванием второго шара в коробке находятся один зелёный шар и четыре фиолетовых. Поэтому вероятность того, что в этой ситуации второй взятый шар также окажется зелёным, равна $\frac{1}{5}$, т. е. $P_A(B) = \frac{1}{5}$. ■

Решение задач на вычисление условных вероятностей удобно иллюстрировать с помощью древовидной схемы — **дендрограммы** (от греч. *дендрон* — дерево и *грамма* — письмо). Например, опыт из примера 1 можно проиллюстрировать дендрограммой, на которой представлены все возможные результаты данного испытания (рис. 19.2).

Возле стрелок дендрограммы удобно ставить значения вероятностей соответствующих событий. Предлагаем вам проверить самостоятельно правильность вычисления вероятностей, записанных на дендрограмме (см. рис. 19.2).

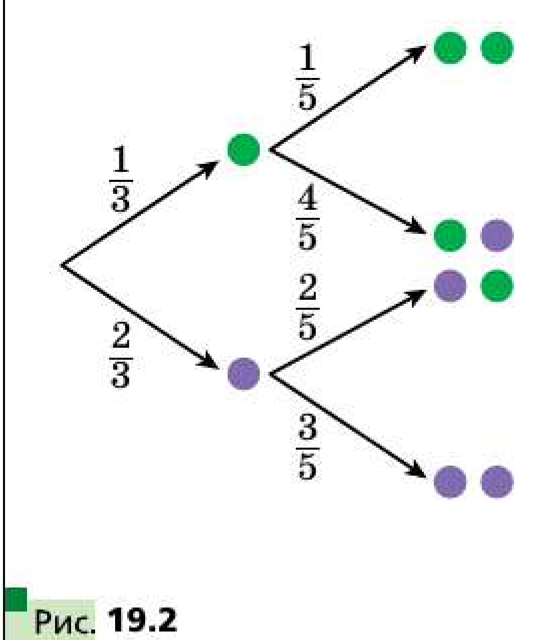


Рис. 19.2

[1] Обратите внимание, что если A и B являются событиями некоторого опыта с пространством элементарных исходов Ω, то, говоря о вероятности события A при условии, что произошло событие B, следует представлять, вообще говоря, другое испытание, уже с пространством элементарных исходов B. Можно считать, что этот новый опыт совпадает с исходным, за тем лишь исключением, что если исходный опыт завершается результатом, при котором не произошло событие B, то этот результат «не засчитывается» и исходный опыт нужно повторить ещё раз.

Дендрограмма является примером важного математического объекта, применяемого в различных областях знаний. Например, при классификации живых организмов используют иерархическую модель, напоминающую графическую схему (см. рис. 19.2). Химическую структуру органических соединений также удобно изображать в виде подобных схем. Такого рода объекты, состоящие из точек и соединяющих их отрезков, называют графами. Если вы хотите узнать больше о графах и их свойствах, то советуем принять участие в работе над проектом «Элементы теории графов».

Рассмотрим следующий опыт. Пусть в прямоугольнике отмечено n точек, часть из которых покрашены в зелёный цвет, а часть имеют больший размер, чем остальные (рис. 19.3).

Количество больших зелёных точек обозначим через x, маленьких зелёных — через y.

Испытание состоит в том, что из отмеченных n точек прямоугольника наугад выбирают одну. Таким образом, множество отмеченных точек образует пространство элементарных исходов.

В этом испытании событие A состоит в том, что выбранная точка окажется зелёной, а событие B — в том, что выбранная точка окажется большой.

Поскольку все исходы в данном опыте равновозможны, то $P(A) = \frac{x + y}{n}$.

Теперь найдём вероятность события $A \cap B$, состоящего том, что выбранная точка окажется зелёной и большой одновременно. Получаем: $P(A \cap B) = \frac{x}{n}$.

Вычислим также вероятность $P_A(B)$. Если произошло событие A, т. е. выбрана зелёная точка, то это означает, что из n равновозможных исходов опыта имеет смысл рассматривать только $x + y$ зелёных точек (рис. 19.4).

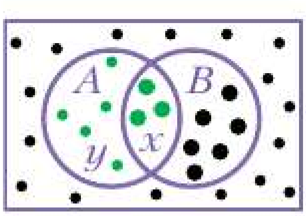


Рис. 19.3

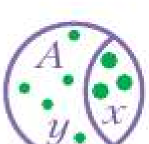


Рис. 19.4

Из этих $x + y$ равновозможных исходов событию B благоприятствуют x результатов. Поэтому $P_A(B) = \frac{x}{x + y}$.

Используя найденные значения вероятностей, можно записать:

$$P_A(B) \cdot P(A) = \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x+y}{n} = \frac{x}{n} = P(A \cap B).$$

Таким образом, **для опыта с n равновозможными элементарными исходами выполняется равенство**

$$\boxed{P_A(B) \cdot P(A) = P(A \cap B),} \tag{1}$$

которое при условии $P(A) > 0$ можно переписать в виде

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \tag{2}$$

Равенство (2) поясняет, почему при $P(A) > 0$ используют следующее определение.

Определение

Пусть A и B — события некоторого испытания и $P(A) > 0$. Тогда условной вероятностью $P_A(B)$ события B при условии, что произошло событие A, называют число $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

В случае, когда $P(A) = 0$, условную вероятность $P_A(B)$ не определяют.

Пример 2. Известно, что озимая рожь успешно переносит зиму с вероятностью $\frac{9}{10}$. Если озимая рожь успешно перенесёт зиму, то вероятность того, что и озимая пшеница успешно перезимует, равна $\frac{13}{15}$. Если же озимую рожь весной придётся пересевать, то вероятность того, что придётся пересевать и озимую пшеницу, равна $\frac{4}{5}$. Найдите вероятность того, что пшеница успешно перезимует.

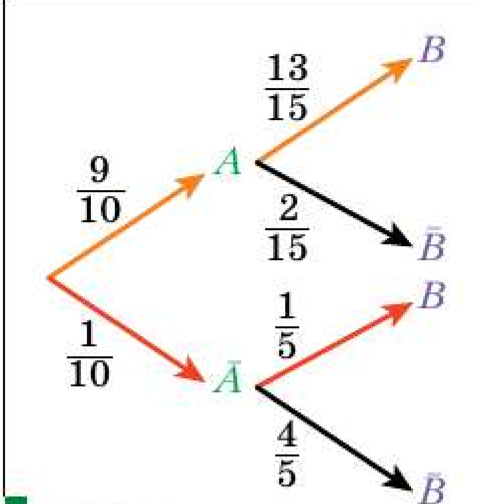


Рис. 19.5

Решение. Обозначим через A и B события, состоящие в том, что успешно перенесут зиму рожь и пшеница соответственно. Тогда данные задачи можно проиллюстрировать дендрограммой, изображённой на рисунке 19.5.

Рожь и пшеница успешно перезимуют, если произойдёт и событие A, и событие B (оранжевые стрелки на дендрограмме). Учитывая формулу (1), получаем:

$$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = \frac{9}{10} \cdot \frac{13}{15} = \frac{39}{50} = 78\,\%.$$

Пшеница успешно перезимует, а рожь придётся пересевать, если произойдёт и событие B, и событие $\bar{A}$ (красные стрелки на дендрограмме). Поэтому

$$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{50} = 2\,\%.$$

Пшеница успешно перезимует (событие B) при одном из двух вариантов — рожь успешно перезимует (событие A) или рожь придётся пересевать (событие $\bar{A}$). Эти два варианта проиллюстрированы на дендрограмме (см. рис. 19.5) оранжевой и красной стрелками.

Это означает, что событие B является объединением двух несовместных событий: $A \cap B$ (оранжевые стрелки) и $\bar{A} \cap B$ (красные стрелки). Поэтому

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 78\,\% + 2\,\% = 80\,\%.$$

Ответ: 0,8. ■

Обратим внимание, что при решении примера 2 для поиска вероятности того, что пшеница успешно перезимует, были рассмотрены два взаимоисключающих варианта: рожь успешно перезимует и рожь придётся пересевать. Понятно, что это рассуждение можно обобщить.

Пусть в некотором опыте рассматриваются такие события H_1 и H_2, что при любом исходе опыта происходит ровно одно из этих событий и $P(H_1) > 0$, $P(H_2) > 0$. Это означает, что множества H_1 и H_2 не пересекаются и их объединение равно всему пространству элементарных исходов Ω. Тогда для любого события A этого опыта выполняется равенство

$$P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2).$$

Дендрограмма на рисунке 19.6 и рисунок 19.7 иллюстрируют эту формулу.

Аналогично, если события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ с положительными вероятностями являются попарно несовместными, а их объединение равно всему пространству элементарных исходов Ω, то вероятность события A вычисляется по формуле

$$\boxed{\boldsymbol{P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2) + \ldots + P_{H_n}(A) \cdot P(H_n)}}$$

Это равенство называют **формулой полной вероятности.**

Пример 3. Известно, что озимая рожь успешно переносит зиму с вероятностью $\frac{9}{10}$. Если озимая рожь успешно перенесёт зиму, то вероятность того, что и озимая пшеница успешно перезимует, равна $\frac{13}{15}$. Если же озимую рожь весной придётся пересевать, то вероятность того, что придётся пересевать и озимую пшеницу, равна $\frac{4}{5}$. Весной оказалось, что пшеница успешно перезимовала. Найдите вероятность того, что и озимая рожь успешно перенесла зиму.

Решение. Как и в предыдущей задаче, обозначим через A и B события, состоящие в том, что успешно перенесут зиму рожь и пшеница соответственно. Тогда нам требуется найти вероятность события A при условии, что произошло событие B. Из решения предыдущей задачи известно, что $P(B) = 0{,}8$. Поэтому

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{13}{15} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{8}{10}} = \frac{39}{40}.$$

Ответ: $\frac{39}{40}$. ■

Полученную при решении задачи формулу

$$\boxed{\boldsymbol{P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)}}}$$

называют **формулой Байеса**.

Обратим внимание, что предложенное решение примера 3 можно изложить и иначе. Вместе с дендрограммой, представленной на рисунке 19.5, изобразим ещё одну, связанную с этой задачей. Поменяем события A и B местами и учтём, что $P(B) = \frac{8}{10}$ (рис. 19.8). Пусть искомая вероятность $P_B(A)$ равна x. Тогда вероятность события $A \cap B$ можно

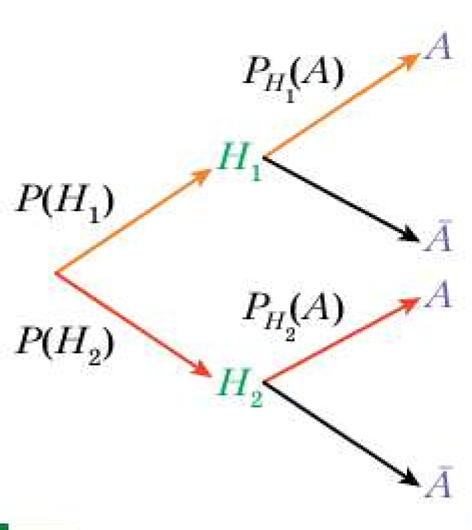


Рис. 19.6

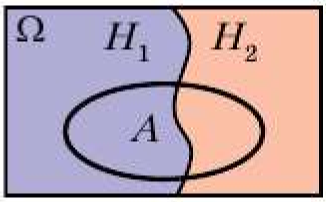


Рис. 19.7

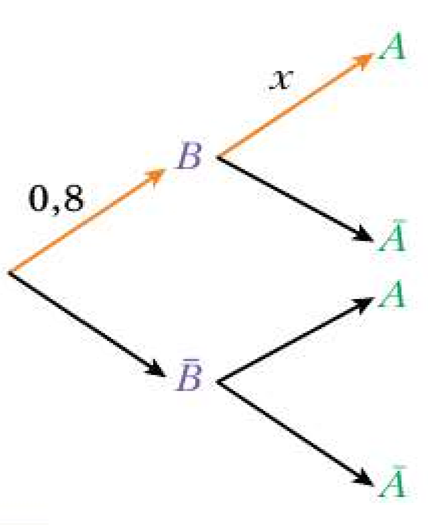


Рис. 19.8

найти из обеих дендрограмм (оранжевые стрелки на дендрограммах 19.5 и 19.8). Приравнивая найденные значения $P(A \cap B)$, получаем:

$$\frac{13}{15} \cdot \frac{9}{10} = \frac{8}{10} \cdot x.$$

Отсюда $x = \frac{39}{40}$.

Ответ: $\frac{39}{40}$. ■

1. Как называют вероятность события A, если известно, что произошло событие B?
2. Какую диаграмму удобно использовать для иллюстрации задач на вычисление условных вероятностей?
3. По какой формуле определяют условную вероятность?
4. Что называют формулой полной вероятности?
5. Что называют формулой Байеса?

Упражнения

19.1. Среди учащихся вашего класса наугад выбрали одного. Найдите вероятность того, что выбранный учащийся имеет оценку «5» по алгебре, если известно, что выбрали мальчика.

19.2. В таблице представлена информация о животных питомника. Из всех животных питомника наугад выбрали одно. Найдите вероятность того, что выбранное животное старше года, если известно, что выбрали собаку.

	Собаки	Кошки
До года	5	4
От года до двух лет	3	8
Старше двух лет	12	18

19.3. В коробке лежат несколько шаров одного цвета: либо все красные, либо все синие. Вероятность того, что в коробке лежат красные шары, равна $\frac{1}{2}$. Из коробки наугад последовательно берут два шара.

1) Какова вероятность того, что второй вынутый шар окажется красным?

2) Какова вероятность того, что второй вынутый шар окажется красным, если первый вынутый шар также оказался красным?

3) Какова вероятность того, что второй вынутый шар окажется красным, если первый вынутый шар оказался синим?

19.4. Монету подбрасывают четыре раза. Найдите вероятность того, что в каждом из последних двух подбрасываний выпадет герб, если в каждом из первых двух подбрасываний выпало число.

19.5. В коробке лежат ручки синего и красного цветов. Из коробки наугад последовательно достают две ручки. Составьте дендрограмму этого испытания.

19.6. В одном ящике лежат шары трёх цветов: красного, синего и белого, а в другом двух цветов: зелёного и чёрного. Из каждой коробки наугад выбирают по одному шару. Составьте дендрограмму этого испытания.

19.7. Человек ожидает на остановке автобус или троллейбус и заходит в тот вид транспорта, который придёт первым. Находясь в транспорте, человек садится на сиденье возле окна, если есть такое свободное место. Составьте дендрограмму этого испытания.

19.8. Известно, что $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,5$ и $P(A \cup B) = 0,6$. Найдите:
1) $P(A \cap B)$; 2) $P_A(B)$; 3) $P_B(A)$.

19.9. Известно, что $P_A(B) = 0,5$, $P_B(A) = 0,75$ и $P(A \cap B) = 0,25$. Найдите:
1) $P(A)$; 2) $P(B)$; 3) $P(A \cup B)$.

19.10. На собрании присутствуют 19 человек, из которых 12 женщин и 7 мужчин. Для подсчёта результатов голосования предлагается выбрать счётную комиссию из трёх человек. Членов счётной комиссии выбирают последовательно путём жребия. Известно, что первыми двумя членами комиссии оказались мужчины. Найдите вероятность того, что третьим из выбранных членов счётной комиссии окажется женщина. Составьте дендрограмму этого опыта.

19.11. Из коробки, в которой лежат 20 синих и 15 красных шаров, наугад берут сначала один, а потом ещё один шар. Известно, что первый шар был синим. Вычислите вероятность того, что второй шар окажется красным. Составьте дендрограмму этого опыта.

19.12. После путешествия в Европу у путешественника остались фотографии — 10 пейзажей и 15 портретов из Франции и 6 пейзажей и 14 портретов из Италии. Путешественник выбирает наугад 2 фотографии. Какова вероятность того, что они обе будут пейзажами, если известно, что он не выбрал ни одного портрета из Франции?

19.13. В букинистическом магазине на полке с детективами стоят 20 книг, из которых 4 в твёрдой и 16 в мягкой обложке, а на полке со сборниками поэзии — 40 книг, из которых 10 в твёрдой и 30 в мягкой обложке. Посетитель магазина берёт наугад одну книгу с этих полок.

Какова вероятность того, что это будет сборник поэзии, если известно, что выбранная книга не является детективом в мягкой обложке?

19.14. На проспекте установлено два светофора. Вероятность зафиксировать зелёный свет на первом светофоре равна 0,8, а на втором светофоре — 0,9. Вероятность зафиксировать зелёный свет одновременно на обоих светофорах равна 0,7. Найдите вероятность:
1) зафиксировать зелёный свет на первом светофоре при условии, что на втором светофоре также горит зелёный свет;
2) зафиксировать зелёный свет на втором светофоре при условии, что на первом светофоре также горит зелёный свет;
3) зафиксировать сигнал, запрещающий движение на первом светофоре, при условии, что на втором светофоре горит зелёный свет;
4) зафиксировать зелёный свет на втором светофоре при условии, что на первом светофоре горит сигнал, запрещающий движение.

19.15. Пиццерия предлагает по желанию посетителя добавлять в пиццу бекон и/или грибы. Вероятность того, что посетитель попросит добавить бекон, равна 0,6, а грибы — 0,7. Вероятность же того, что посетитель попросит добавить в пиццу бекон или грибы, равна 0,8. Найдите вероятность того, что:
1) посетитель попросит добавить бекон, если известно, что он уже попросил добавить грибы;
2) посетитель попросит добавить грибы, если известно, что он не любит бекон.

19.16. Вероятность того, что наугад выбранный клиент банка имеет текущий счёт, равна 80 %, депозитный — 60 %. Среди тех, у кого открыт текущий счёт, доля клиентов с депозитным счётом составляет 70 %. Найдите вероятность того, что у клиента, имеющего депозитный счёт, открыт и текущий.

19.17. Согласно данным страховой компании, вероятность того, что водитель попадёт в аварию в течение года, равна 0,05. Однако, если известно, что водительский стаж меньше двух лет, то такая вероятность составляет уже 0,15. Среди водителей 25 % имеют стаж меньше двух лет. Найдите вероятность того, что у водителя, который попал в аварию в течение года, водительский стаж был меньше двух лет.

19.18. В коробке лежат 24 синих и 16 красных ручек. Дима выбирает наугад ручку из коробки и этой ручкой пишет число на бумаге. Электронный сканер распознаёт число, написанное синей ручкой, с вероятностью 90 %, а число, написанное красной ручкой, с вероятностью 70 %. Найдите вероятность того, что:
1) написанное число будет распознано;

2) Дима выбрал красную ручку, если известно, что сканер распознал число.

19.19. На соревнованиях по метанию копья последнему спортсмену осталось выполнить последнюю попытку. Если во время броска ветер будет попутным, то спортсмен сможет победить с вероятностью 0,42, если же ветер будет встречный — то с вероятностью 0,35. Вероятность метнуть копьё при попутном ветре равна 0,6. Найдите вероятность того, что:

1) спортсмен победит;

2) спортсмен метал копьё при попутном ветре, если известно, что он победил.

19.20. Два завода производят зонты. Первый завод производит 30 %, а второй 70 % всего объёма зонтов. Вероятность купить бракованный зонт равна 1 %, если он изготовлен на первом заводе, и равна 3 %, если на втором. Найдите вероятность того, что:

1) наугад выбранный зонт окажется бракованным;

2) наугад выбранный зонт изготовлен на первом заводе, если известно, что он оказался исправным.

19.21. Из коробки, в которой лежат 10 синих и 18 красных шаров, наугад берут сначала один, а потом ещё один шар. Вычислите вероятность того, что первый взятый шар синий, при условии, что второй шар оказался красным.

19.22. Из коробки, в которой лежат 2 синих и 3 красных шара, наугад берут сначала один, а потом ещё один шар. Вычислите вероятность того, что взятые шары одного цвета, если среди взятых шаров есть красный.

19.23. Петя выигрывает партию в настольный теннис у своего друга Серёжи с вероятностью 0,6. Ребята решили сыграть матч из 10 партий, победитель которого получает кулёк конфет. При счёте 5 : 5 приз достаётся Серёже. После семи сыгранных партий счёт был 4 : 3 в пользу Пети, но тут пришла мама и матч пришлось прервать. Как ребята должны разделить кулёк конфет?

§ 20 Независимые события

Рассмотрим опыт, в котором сначала подбрасывают монету в 5 р., а затем — монету в 10 р. Этот опыт может закончиться одним из четырёх равновозможных результатов (рис. 20.1).

		Монета 10 р.	
		Герб	Число
Монета 5 р.	Герб	Герб Герб	Герб 10
	Число	5 Герб	5 10

Рис. **20.1**

Рассмотрим два события:

A — при подбрасывании монеты в 5 р. выпал герб;

B — при подбрасывании монеты в 10 р. выпал герб.

Поскольку событию A благоприятствуют два из четырёх результатов опыта (см. рис. 20.1), то $P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Аналогично $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Поставим такой вопрос: изменится ли вероятность выпадения герба при подбрасывании монеты в 10 р. (событие B), если известно, что на монете в 5 р. уже выпал герб (состоялось событие A)? Т. е. сравним величины $P(B)$ и $P_A(B)$.

Наш опыт подсказывает, что вероятность не должна измениться, поскольку подбрасывание монеты в 10 р. выполняется *независимо* от результата подбрасывания монеты в 5 р.

Действительно, если произошло событие A (на монете в 5 р. выпал герб), то из четырёх равновозможных результатов опыта имеет смысл рассматривать только два (рис. 20.2).

		Монета 10 р.	
		Герб	Число
Монета 5 р.	Герб	Герб Герб	Герб 10

Рис. **20.2**

Из этих двух результатов событию B благоприятствует только один. Поэтому $P_A(B) = \frac{1}{2}$. Таким образом, $P_A(B) = P(B)$.

Значение $P_A(B)$ можно было бы найти, пользуясь определением условной вероятности. А именно из четырёх равновозможных элементарных исходов (см. рис. 20.1) событию $A \cap B$ благоприятствует только один — на обеих монетах выпал герб. Поэтому

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, расчёты подтвердили предположение, что $P_A(B) = P(B)$, т. е. вероятность события B не изменяется в зависимости от того, произошло ли событие A. Точно так же можно показать, что $P_B(A) = P(A)$, т. е. вероятность события A не изменяется в зависимости от того, произошло ли событие B. В таком случае говорят, что события A и B являются **независимыми**.

Условные вероятности $P_A(B)$ и $P_B(A)$ определены только для событий A и B с положительными вероятностями. Поэтому равенства $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$ определяют понятие независимости событий только в случае, когда $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$.

Обратите внимание, что равенство $P_A(B) = P(B)$ можно записать так:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B),$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Эти рассуждения поясняют, почему используют следующее определение.

Определение

События A и B некоторого испытания называют независимыми, если $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Обратим внимание, что если $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$, то равенство $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ выполняется (докажите это самостоятельно). Поэтому такие события A и B также относят к независимым.

Если же $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то равенство $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ является равносильным каждому из двух следующих равенств: $P_A(B) = P(B)$ и $P_B(A) = P(A)$.

Если события A и B не являются независимыми, то их называют **зависимыми**. Например, пусть игральный кубик подбрасывают один раз. Если событие A состоит в том, что на игральном кубике выпало чётное число, а событие B — в том, что на игральном кубике выпала двойка, то $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(B) = \frac{1}{6}$. Поэтому $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, т. е. такие события A и B являются зависимыми.

Понятие независимости событий можно обобщить для трёх и большего количества событий: ***события некоторого испытания называют независимыми***[1], ***если для любого набора $A_1, A_2, \ldots, A_n$ этих событий выполняется равенство***

$$\boxed{\boldsymbol{P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)}}$$

Если вероятности всех рассматриваемых событий больше нуля, то так же, как и в случае независимости двух событий, *несколько событий являются независимыми тогда и только тогда, когда вероятность любого из них не изменяется в зависимости от того, произошли ли какие-нибудь из оставшихся событий.*

Пример 1. Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9. Найдите вероятность того, что из трёх последовательных независимых выстрелов стрелок попадёт в мишень только с третьего раза.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что стрелок не попадёт в мишень при первом выстреле, событие B — в том, что он не попадёт в мишень при втором выстреле, а событие C — в том, что он попадёт в мишень при третьем выстреле. Отметим, что $P(A) = 0{,}1$, $P(B) = 0{,}1$, $P(C) = 0{,}9$.

Стрелок попадёт в мишень только с третьего раза, если произойдёт событие $A \cap B \cap C$. Поскольку выстрелы производятся независимо один от другого, то события A, B и C будут независимыми. Поэтому

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)\,P(B)\,P(C) = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 0{,}009.$$

Ответ: 0,009. ■

Пример 2. В партии из 20 000 лампочек есть 500 бракованных. Опыт состоит в том, что последовательно наугад выбирают 40 лампочек. Какова вероятность того, что бракованной окажется только первая лампочка из 40 выбранных?

Решение. Используя комбинаторные формулы, решить задачу достаточно легко. Закодируем 20 000 лампочек числами от 1 до 20 000. Тогда элементарным исходом данного испытания будет любой 40-элементный упорядоченный набор чисел из множества {1, 2, ..., 20 000}. Например, упорядоченный набор (2, 3, ..., 41) означает, что первой вытянули лампочку с номером 2, затем — лампочку с номером 3 и т. д., последней

[1] Также используется термин «независимые в совокупности события».

вытянули лампочку с номером 41. Поэтому пространство равновозможных элементарных исходов состоит из $A_{20\,000}^{40}$ элементов.

В то же время количество таких 40-элементных наборов, среди которых только первый элемент соответствует бракованной лампочке (событие X), равно $A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}$ (подумайте почему). Поэтому

$$P(X)=\frac{A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}.$$

Ответ получен, и задача решена. Однако зададим вполне резонный вопрос: как воспользоваться таким ответом на практике? Полученное число — оно большое или маленькое? Как в десятичной записи числа $P(X)$ найти хотя бы несколько знаков после запятой? Вряд ли получится подсчитать соответствующие числа и на калькуляторе, поскольку даже после сокращения всех дробей придётся работать с более чем 100-значными числами[1].

В таких случаях в теории вероятностей разрешается решать задачу с некоторой погрешностью (так же, как, например, в школьном курсе физики пренебрегают сопротивлением воздуха при расчёте движения предмета).

Приведём соответствующие рассуждения.

Заметим, что вероятность, взяв одну лампочку, выбрать бракованную составляет $p=\frac{500}{20\,000}=0{,}025$. Поскольку число 40 мало по сравнению с 20 000 и 500, то будем считать, что на каждом из 40 шагов вероятность выбрать бракованную лампочку не зависит от результатов, полученных на других шагах, и равна p.

Обозначим через A_k случайное событие «взять не бракованную лампочку на k-м шаге», где $2\leqslant k\leqslant 40$, а через B_1 — случайное событие «взять бракованную лампочку на первом шаге». Тогда $P(A_k)=1-p=0{,}975$, $P(B_1)=p=0{,}025$. Случайное событие X — «бракованной является только первая лампочка из 40 выбранных» — можно представить в виде

$$X=B_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap\ldots\cap A_{40}.$$

Согласно нашим договорённостям случайные события B_1, A_2, A_3, A_4, ..., A_{40} являются независимыми. Следовательно,

$$P(X)=P(B_1)P(A_2)P(A_3)\ldots P(A_{40})=p(1-p)^{39}\approx 0{,}00931.$$

Таким образом, искомая вероятность приблизительно равна 1 %. ■

[1] С помощью специализированных вычислительных программ, поддерживающих работу с многозначными числами, было найдено, что $P(X)=\frac{A_{500}^{1}A_{19\,500}^{39}}{A_{20\,000}^{40}}=0{,}00932\ldots$.

1. Как называют два события некоторого испытания, если вероятность одного из них не меняется в зависимости от того, произошло ли второе событие?
2. Какие два события называют независимыми?
3. Какие два события называют зависимыми?
4. Какие n событий называют независимыми?

Упражнения

20.1. При обстреле смеси изотопов урана пучком нейтронов вероятность начала управляемой ядерной цепной реакции составляет 40 %. Какова вероятность того, что из двух таких независимых опытов только во втором начнётся управляемая ядерная цепная реакция?

20.2. Согласно демографическим исследованиям, вероятность того, что новорождённый ребёнок окажется мальчиком, равна 0,512. Найдите вероятность того, что в семье, планирующей иметь троих детей, дети родятся в последовательности: мальчик, девочка, мальчик.

20.3. Стрелок попадает в мишень с вероятностью p. Опыт состоит в том, что стрелок стреляет до тех пор, пока не попадёт в мишень. Найдите вероятность того, что ему придётся стрелять 6 раз.

20.4. В некачественной партии деталей вероятность обнаружить бракованную деталь составляет 0,2. Контролёр проверяет детали до тех пор, пока не выявит первую бракованную. Найдите вероятность того, что ему придётся проверить 8 деталей.

20.5. Пусть A и B — независимые события некоторого испытания. Докажите, что события $\bar{A}$ и B также являются независимыми.

20.6. Пусть A и B — независимые события некоторого испытания. Докажите, что события $\bar{A}$ и $\bar{B}$ также являются независимыми.

20.7. Пусть A и B — несовместные события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли случайные события A и B быть независимыми?

20.8. Пусть A и B — независимые события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли случайные события A и B быть несовместными?

20.9. Пусть A и B — независимые события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли события A и B быть несовместными?

20.10. Пусть A и B — несовместные события некоторого испытания с ненулевыми вероятностями. Могут ли события A и B быть независимыми?

20.11. Андрей попадает в мишень с вероятностью 0,4, Сергей — 0,5, а Пётр — 0,7. Все трое делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень:

1) попадут все юноши;
2) ни один из юношей не попадёт;
3) только Андрей попадёт;
4) ровно один из юношей попадёт;
5) только один из юношей не попадёт;
6) по крайней мере двое юношей попадут?

20.12. Среди лотерейных билетов 10 % выигрышных. Игрок приобрёл 3 билета. Какова вероятность того, что среди купленных билетов:

1) не будет выигрышных;
2) будет ровно один выигрышный;
3) будет ровно два выигрышных;
4) будут все выигрышные?

20.13. Вероятность того, что футбольный матч между командами A и B завершится вничью, составляет 50 %. Вероятность победы команды A равна 20 %, а команды B — 30 %. Команды A и B планируют провести серию из четырёх поединков между собой. Какова вероятность того, что:

1) все игры закончатся вничью;
2) команда B не проиграет ни одного матча;
3) команда A победит только во второй игре;
4) команда A победит только один раз в серии?

20.14. Электрический блок (рис. 20.3) работает безотказно в течение года с вероятностью p. Для увеличения надёжности электрический блок дублируют ещё одним таким же блоком так, что полученная система работает тогда, когда работает по крайней мере один из блоков (рис. 20.4). Какова вероятность безотказной работы системы в течение года, если поломка каждого электрического блока происходит независимо от работы других блоков?

Рис. **20.3**

Рис. **20.4**

20.15. Электрический блок (см. рис. 20.3) работает безотказно в течение года с вероятностью p. Для увеличения надёжности электрический блок дублируют ещё тремя такими же блоками так, что полученная система работает тогда, когда работает по крайней мере один из блоков (рис. 20.5). Какова вероятность безотказной работы системы в течение года, если поломка каждого электрического блока происходит независимо от работы других блоков?

20.16. Схема состоит из трёх электрических блоков (рис. 20.6), каждый из которых работает безотказно в течение года с вероятностью p. Если выходит из строя хотя бы один блок, то система перестаёт работать. Для увеличения надёжности схему дополняют ещё тремя блоками (рис. 20.7). Какова вероятность безотказной работы системы в течение года? Увеличится ли надёжность системы, если использовать схему, изображённую на рисунке 20.8?

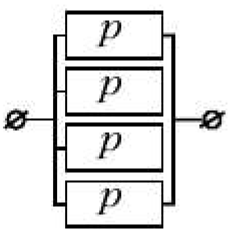


Рис. **20.5**

Рис. **20.6**

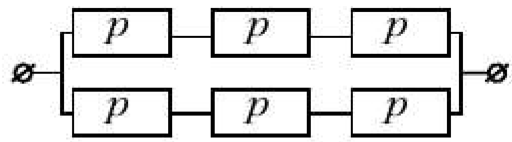


Рис. **20.7**

20.17. Некоторые (наименее надёжные) блоки электрической схемы дублируют (рис. 20.9). Вероятности безотказной работы каждого блока в течение года изображены на этом рисунке. Какова вероятность безотказной работы всей системы в течение года?

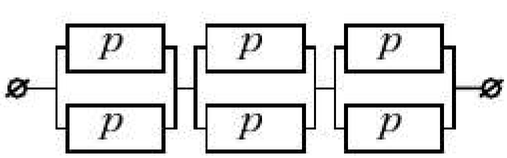


Рис. **20.8**

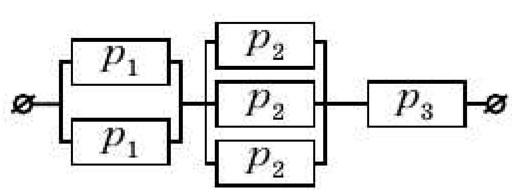


Рис. **20.9**

20.18. При одном обороте локатора радиолокационная станция обнаруживает объект с вероятностью 70 %. Обнаружение объекта на каждом обороте не зависит от предыдущих оборотов. Сколько оборотов должна сделать радиолокационная станция, чтобы обнаружить объект с вероятностью, превышающей 99,9 %?

20.19. Вероятность того, что Вася Ошибочкин даст правильный ответ на поставленный вопрос учителя, составляет 7 %. Сколько вопросов должен задать учитель, чтобы Вася дал хотя бы один правильный ответ с вероятностью, большей чем 50 %?

20.20. Для рекламы прохладительного напитка производитель решил закрыть крышками со скрытой надписью «приз» 30 000 бутылок из 500 000 выпущенных. Серёжа любит этот напиток и планирует за месяц выпить 15 бутылок. Какова вероятность того, что Серёжа найдёт надпись «приз» только под крышкой пятой выпитой бутылки напитка? Ответ округлите до десятых процента.

20.21. В некоторой стране около 100 млн избирателей, из которых партию A поддерживают около 20 млн людей. Какова вероятность того, что среди 5 человек, опрошенных наугад, партию A поддержит только первый опрошенный? Ответ округлите до 1 %.

§ 21 Случайная величина

При изучении теории вероятностей нас часто интересуют числовые величины, связанные с результатами испытаний. Так, подбрасывая игральные кубики в настольной игре, мы хотим узнать количество клеток, на которые нужно передвинуть фишку; изучая качество продукции, вычисляют процент бракованных деталей в случайно выбранной пробной партии; планируя работу станции «Скорой помощи», выясняют количество вызовов, поступивших за определённый промежуток времени, и т. п. В таких случаях говорят, что в данном испытании рассматривается **случайная величина** (количество клеток в игре, процент бракованных деталей, количество вызовов «Скорой помощи»).

Например, баскетболист во время тренировки последовательно выполняет три броска: штрафной (1 очко), из-под кольца (2 очка) и затем бросок из-за трёхочковой линии (3 очка). Тренер записывает результаты, последовательно отмечая знаком «плюс» попадание, а знаком «минус» — промах баскетболиста. В этом опыте 8 элементарных исходов.

Элементарные исходы	+ + +	+ + −	+ − +	+ − −	− + +	− + −	− − +	− − −

Пусть случайная величина x равна количеству очков, набранных баскетболистом за эти броски. Это означает, что если, например, опыт закончился исходом «+ − +», то баскетболист успешно выполнил штрафной и трёхочковый броски. Поэтому $x = 4$. Вообще, значение, которое примет случайная величина x, определяется элементарным исходом рассматриваемого опыта. Описать все значения случайной величины можно следующей таблицей.

Элементарные исходы	+ + +	+ + −	+ − +	+ − −	− + +	− + −	− − +	− − −
Значение случайной величины x	6	3	4	1	5	2	3	0

Таким образом, каждому элементарному исходу поставлено в соответствие некоторое число — значение случайной величины. Это означает, что случайная величина представляет собой функцию, аргументами которой являются элементарные исходы, а значениями — набранные баскетболистом очки.

Определение

Функцию, которая каждому элементарному исходу некоторого опыта ставит в соответствие число, называют случайной величиной.

Случайные величины будем обозначать латинскими буквами x, y, ...

Задают случайную величину так же, как и любую функцию: таблицей значений, формулой, описательно, графиком и т. д. Например, для рассмотренной выше случайной величины x мы привели два способа её задания: описательно («случайная величина x равна количеству очков, набранных баскетболистом») и таблицей значений.

Областью определения случайной величины является пространство элементарных исходов Ω, а **областью значений (множеством значений) случайной величины** — некоторое подмножество множества $\boldsymbol{R}$.

Пример 1. Случайная величина x равна количеству гербов, выпавших при подбрасывании двух монет. Найдите множество значений случайной величины x.

Решение. Поскольку в результате подбрасывания двух монет может выпасть или 0, или 1, или 2 герба, то множеством значений случайной величины x является множество $\{0, 1, 2\}$. ■

Обратимся ещё раз к опыту из примера 1. Если пронумеровать монеты, то можно считать, что данное испытание заканчивается одним из четырёх равновозможных элементарных исходов:

Элементарные исходы	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ

где буквой «Г» обозначено выпадение на монете герба, а буквой «Ч» — числа.

Возможные значения случайной величины x, равной количеству гербов, выпавших при подбрасывании двух монет, представим в виде таблицы.

Элементарные исходы	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
Значение случайной величины x	2	1	1	0

Из этой таблицы видим, что случайная величина x принимает значение 2 в одном из четырёх равновозможных случаев, т. е. с вероятностью $\frac{1}{4}$. Этот факт принято записывать так: $P(x = 2) = \frac{1}{4}$. Рассуждая аналогично, получаем: $P(x = 0) = \frac{1}{4}$, $P(x = 1) = \frac{1}{2}$.

Соответствие между значениями случайной величины и вероятностями, с которыми она их принимает, — $P(x = 0) = \frac{1}{4}$, $P(x = 1) = \frac{1}{2}$, $P(x = 2) = \frac{1}{4}$ — называют **распределением вероятностей** случайной величины x. Распределение вероятностей случайной величины часто представляют в виде таблицы.

Значение x	0	1	2
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Отметим, что сумма чисел, записанных во второй строке таблицы распределения вероятностей случайной величины, равна 1. Это следует из того, что случайная величина гарантированно принимает одно из значений, указанных в первой строке таблицы.

Пример 2. Распределение вероятностей случайной величины z задано таблицей, в которой пропущено одно значение.

Значение z	1	3	7	8	10
Вероятность	0,1	0,35	0,25		0,15

Найдите вероятности: 1) $P(z = 4)$; 2) $P(z < 6)$; 3) $P(9 \leqslant z < 12)$; 4) $P(z = 8)$.

Решение. 1) Запись $P(z = 4)$ означает вероятность события, состоящего в том, что случайная величина z равна 4. Поскольку в первой строке таблицы распределения вероятностей отсутствует число 4, то это означает, что случайная величина z при любом исходе испытания не может оказаться равной 4. Поэтому $P(z = 4) = 0$.

2) Случайная величина z принимает значение, меньшее 6, только когда $z = 1$ или $z = 3$. Поскольку события «случайная величина принимает значение 1» и «случайная величина принимает значение 3» являются несовместными, то

$$P(z < 6) = P(z = 1) + P(z = 3) = 0{,}1 + 0{,}35 = 0{,}45.$$

3) Имеем:

$$P(9 \leqslant z < 12) = P(z = 10) = 0{,}15.$$

4) Поскольку сумма чисел, записанных во второй строке таблицы, равна 1, то

$$P(z = 8) = 1 - (0{,}1 + 0{,}35 + 0{,}25 + 0{,}15) = 0{,}15.$$

Ответ: 0,15. ■

Рассмотрим следующий опыт. Красный и синий игральные кубики подбрасывают один раз и фиксируют выпавшие числа на каждом кубике. Пусть случайная величина x равна числу, выпавшему на красном кубике. В этом же испытании нас могут интересовать и другие случайные величины, например:

- величина y равна числу, выпавшему на синем кубике;
- величина z равна сумме чисел, выпавших на кубиках;
- величина t равна произведению чисел, выпавших на кубиках;
- величина u равна величине x, возведённой в пятую степень.

Таким образом, в одном испытании может изучаться несколько разных случайных величин.

Обратите внимание, что, каким бы элементарным исходом ни закончилось описанное выше испытание, значение случайной величины z всегда равно сумме значений случайных величин x и y. В таком случае говорят, что случайная величина z равна **сумме случайных величин** x и y. Записывают: $z = x + y$.

Поскольку случайные величины x и y являются функциями, то это можно сказать и иначе. Функция z является суммой функций x и y.

Аналогично определяют и другие операции со случайными величинами. Например, $t = xy$ и $u = x^5$.

Пример 3. Монету подбрасывают трижды. Случайная величина x равна количеству выпавших при этом гербов, а случайная величина y равна 0, если при первом подбрасывании выпал герб, и равна 3 в противном случае. Найдите:

1) распределение случайной величины x;

2) распределение случайной величины y;

3) распределение случайной величины $z = x + y$.

Решение. Будем писать букву «Г», если на монете выпадает герб, и букву «Ч», если число. Тогда в рассматриваемом опыте существует 8 равновозможных результатов испытания:

ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ, ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

1) Случайная величина x равна нулю (выпало 0 гербов) только в одном из восьми случаев — если произойдёт исход ЧЧЧ. Поэтому

$$P(x = 0) = \frac{1}{8} \text{ — результат испытания ЧЧЧ.}$$

Аналогично найдём вероятности для других значений величины x. Имеем:

$P(x = 1) = \frac{3}{8}$ — результаты испытания ГЧЧ, ЧГЧ, ЧЧГ;

$P(x = 2) = \frac{3}{8}$ — результаты испытания ГГЧ, ГЧГ, ЧГГ;

$P(x = 3) = \frac{1}{8}$ — результат испытания ГГГ.

Теперь можно составить таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x	0	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2) Найдём распределение случайной величины y. Имеем:

$P(y = 0) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ — результаты испытания ГГГ, ГГЧ, ГЧГ, ГЧЧ;

$P(y = 3) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ — результаты испытания ЧГГ, ЧГЧ, ЧЧГ, ЧЧЧ.

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины y.

Значение y	0	3
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

3) Составим общую таблицу значений величин x и y в зависимости от результатов испытания.

Результат испытания	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значение x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значение y	0	0	0	0	3	3	3	3

Сформируем в этой таблице ещё одну строку для значений случайной величины $z = x + y$.

Результат испытания	ГГГ	ГГЧ	ГЧГ	ГЧЧ	ЧГГ	ЧГЧ	ЧЧГ	ЧЧЧ
Значение x	3	2	2	1	2	1	1	0
Значение y	0	0	0	0	3	3	3	3
Значение $z = x + y$	3	2	2	1	5	4	4	3

Из полученной таблицы видно, что случайная величина z равна, например, числу 5 в одном случае из восьми — когда произойдёт исход ЧГГ. Поэтому

$$P(z = 5) = \frac{1}{8} \text{ — результат испытания ЧГГ.}$$

Аналогично найдём вероятности для других значений величины z.

Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины $z = x + y$.

Значение $z = x + y$	1	2	3	4	5
Вероятность	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

1. Что называют случайной величиной?
2. Что называют распределением вероятностей случайной величины?
3. Что называют суммой случайных величин? Произведением случайных величин?

Упражнения

21.1. В целях контроля посещаемости уроков учащимися 11 «А» класса (количества отсутствующих учащихся) завуч в течение дня заходит в класс и записывает фамилии учащихся, отсутствующих на уроке. Опишите все элементарные исходы этого опыта. Какую случайную величину рассматривает завуч школы? Укажите множество значений этой величины.

21.2. Для определения количества клеток, на которые нужно передвинуть фишку в настольной игре, подбрасывают красный и синий игральные кубики и фиксируют числа, выпавшие на них. По правилам игры, если выпадет «дубль», игрок пропускает ход, в противном случае передвигает фишку на количество клеток, равное сумме чисел, выпавших на кубиках. Что является пространством элементарных исходов в этом опыте? Какую случайную величину рассматривает игрок? Укажите множество значений этой величины.

21.3. Изучая качество продукции силикатного завода (процент брака), заводской контролёр фиксирует количество бракованных кирпичей в случайно выбранной палете. Известно, что каждая палета содержит 275 кирпичей. Что является пространством элементарных исходов в этом опыте? Какая случайная величина интересует производителя? Укажите множество значений этой величины.

21.4. Планируя работу станции «Скорой помощи», выясняют количество вызовов, поступающих за 1 час. Для этого прослушивают запись разговоров случайно выбранного оператора службы «Скорой помощи» в течение часа. Что является пространством элементарных исходов в этом опыте? Какая случайная величина исследуется работниками здравоохранения? Укажите множество значений этой величины.

21.5. В коробке лежат 15 шаров, из которых 5 шаров подписаны числом 1, а оставшиеся 10 шаров — числом 2. Из коробки наугад берут один шар. Случайная величина x равна числу, написанному на выбранном шаре. Укажите множество значений и составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

21.6. Игральный кубик подбрасывают один раз. Случайная величина x равна выпавшему на кубике числу. Укажите множество значений и составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

21.7. Используя таблицу распределения вероятностей случайной величины x, найдите значение переменной a.

1)

Значение x	1	2	3	4	5
Вероятность	0,17	0,17	0,17	0,17	a

2)

Значение x	–1	–2	–3	–4
Вероятность	$4a$	$3a$	$2a$	a

3)

Значение x	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Вероятность, %	25	b	21	a	38	$-a$

4)

Значение x	a	$1 - a^2$	7
Вероятность	$5a^2 - 2a$	$2 - 3a$	a^2

21.8. Может ли следующая таблица задавать распределение вероятностей случайной величины x?

Значение x	0	–1	1	–2	2
Вероятность	0,47	0,02	0,19	0,17	0,16

21.9. Используя таблицу распределения вероятностей случайной величины x, найдите значение переменной a.

1)

Значение x	0	12	48
Вероятность	0,27	0,05	a

2)

Значение x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
Вероятность, %	17	30	a	29	24

3)

Значение x	1	2	3	4
Вероятность	a	$4a$	$9a$	$16a$

21.10. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x	0	2	5	7	12	20
Вероятность, %	9	26	35	11	7	12

Найдите:
1) $P(x = 5)$;
2) $P(x = 1)$;
3) $P(x \geqslant 7)$;
4) $P(x < 5)$;
5) $P(2 \leqslant x < 8)$.

21.11. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины y.

Значение y	–3	–2	–1	1	2	3
Вероятность	0,02	0,09	0,36	0,28	0,14	0,11

Найдите:
1) $P(y = 3)$;
2) $P(y \geqslant 0)$;
3) $P(y < 5)$;
4) $P(-2 < y \leqslant 2)$.

21.12. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x	1	7	10	13
Вероятность, %	40	30	20	10

Найдите распределение вероятностей случайной величины:
1) $x + 1$;
2) $-2x$;
3) x^2;
4) $(x - 7)^2$.

21.13. Дана таблица распределения вероятностей случайной величины y.

Значение y	-3	1	2	3
Вероятность, %	15	30	25	30

Найдите распределение вероятностей случайной величины:
1) $y - 4$; 2) $3y$; 3) y^3; 4) $(2 - y)^2$.

21.14. О случайной величине y известно, что $P(y > 3) = 0{,}2$ и $P(y < -3) = 0{,}4$. Найдите:
1) $P(y + 2 > 5)$; 3) $P(y^2 > 9)$;
2) $P(2y < -6)$; 4) $P(5y + 1 \leqslant 16)$.

21.15. О случайной величине x известно, что $P(x > 1) = 0{,}5$ и $P(x \geqslant -3) = 0{,}7$. Найдите:
1) $P(x - 4 > -3)$; 3) $P(2x + 7 < 1)$;
2) $P(7 - x \leqslant 10)$; 4) $P((x + 1)^2 > 4)$.

21.16. Монету подбрасывают дважды. Случайная величина x равна количеству выпавших при этом гербов. Найдите распределение вероятностей случайной величины $z = x + x^2$.

21.17. Монету и игральный кубик подбрасывают одновременно. Случайная величина x равна числу, выпавшему на кубике, а случайная величина y равна 1, если на монете выпал герб, и 0 — если число. Найдите распределение вероятностей случайной величины $z = xy$.

21.18. Игральный кубик подбрасывают два раза. Случайная величина x равна сумме чисел, выпавших на кубике. Составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

21.19. В одной коробке лежат 2 шара, пронумерованных числами 1 и 2; а в другой — 3 шара, пронумерованных числами 1, 2 и 3. Из каждой коробки наугад берут по одному шару. Случайная величина y равна сумме чисел на взятых шарах. Составьте таблицу распределения вероятностей этой случайной величины.

21.20. Игральный кубик подбрасывают один раз и записывают количество натуральных делителей числа, выпавшего на кубике. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной величины, изучаемой в этом испытании.

21.21. Монету подбрасывают не больше пяти раз до тех пор, пока первый раз не выпадет герб, и записывают, сколько раз пришлось подбросить монету. Составьте таблицу распределения вероятностей изучаемой случайной величины.

21.22. Игральный кубик подбрасывают не больше трёх раз до тех пор, пока первый раз не выпадет шестёрка, и записывают, сколько раз пришлось подбросить кубик. Составьте таблицу распределения вероятностей записанной случайной величины.

§ 22 Схема Бернулли. Биномиальное распределение

В теории вероятностей разные на вид задачи могут быть решены одним и тем же способом. В таких случаях говорят, что эти задачи описываются одной и той же **вероятностной моделью**. Одна из самых важных вероятностных моделей получила название «схема Бернулли».

Рассмотрим следующий пример.

Пример 1. Вероятность попадания мяча в корзину при штрафном броске баскетболиста равна p. Баскетболист проводит серию из трёх штрафных бросков (каждый из бросков выполняется независимо от результатов других). Какова вероятность того, что баскетболист попадёт в корзину только:

1) при первом и втором бросках;
2) при втором и третьем бросках;
3) два раза из трёх бросков?

Решение. 1) Событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при первом и втором бросках, закодируем так: «+ + –». По условию задачи вероятность забросить мяч в корзину (вероятность «плюса») равна p, а вероятность промаха (вероятность «минуса») равна $1 - p$. Поскольку броски выполняются независимо, то вероятность события «+ + –» можно найти как произведение вероятностей: $p \cdot p \cdot (1 - p) = p^2(1 - p)$.

2) Закодируем событие, состоящее в том, что баскетболист попадёт в корзину только при втором и третьем бросках, так: «– + +». Рассуждая точно так же, как в пункте 1, получим, что вероятность этого события равна $(1 - p) \cdot p \cdot p = p^2(1 - p)$.

3) Баскетболист попадёт в корзину два раза из трёх бросков, если произойдёт одно из следующих трёх событий: «+ + –», или «+ – +», или «– + +». Поскольку вероятность каждого из этих событий равна $p^2(1 - p)$ и эти события несовместны, то вероятность того, что баскетболист попадёт ровно два раза из трёх бросков, равна $3p^2(1 - p)$. ■

Обобщим пример 1.

В некотором опыте (например, при броске мяча в корзину) с двумя возможными исходами: «У» (успех) и «Н» (неудача) — вероятность исхода «У» равна p. Такой опыт называют **испытанием Бернулли с параметром p**. Пусть испытание Бернулли повторяют n раз, и каждое испытание выполняется независимо от результатов других. Такую серию испытаний Бернулли называют **схемой Бернулли с параметрами n и p**.

В этом опыте элементарным исходом является произвольная последовательность длины n, состоящая из букв «У» и «Н».

Найдём вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p из n проведённых испытаний ровно m завершатся исходом «У» (успех), а остальные $n - m$ испытаний завершатся исходом «Н» (неудача).

Будем рассуждать аналогично решению примера 1. Сначала найдём вероятность того, что первые m испытаний закончатся исходом «У», а оставшиеся $n - m$ испытаний — исходом «Н». Этот элементарный исход закодируем так: «$\underbrace{\text{УУ}\dots\text{У}}_{m\ \text{букв}}\ \underbrace{\text{НН}\dots\text{Н}}_{(n-m)\ \text{букв}}$». Поскольку испытания выполняются независимо, то вероятность события «$\underbrace{\text{УУ}\dots\text{У}}_{m\ \text{букв}}\ \underbrace{\text{НН}\dots\text{Н}}_{(n-m)\ \text{букв}}$» равна:

$$\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m\ \text{множителей}} \cdot \underbrace{(1-p)(1-p) \cdot \ldots \cdot (1-p)}_{(n-m)\ \text{множителей}} = p^m(1-p)^{n-m}.$$

Любое другое событие, в котором m испытаний закончатся исходом «У», а $n - m$ испытаний — исходом «Н», также можно закодировать набором букв, составленным из m букв «У» и $n - m$ букв «Н». Поэтому его вероятность также равна $p^m(1 - p)^{n-m}$. Любые два из этих событий являются несовместными. Следовательно, вероятность того, что из n проведённых испытаний ровно m завершатся исходом «У», равна

$$k \cdot p^m(1-p)^{n-m},$$

где k — количество событий, составленных из m букв «У» и $n - m$ букв «Н».

Осталось найти число k. Поскольку число k равно числу способов расставить m букв «У» в последовательности из n букв, то $k = C_n^m$.

Таким образом, ***вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p ровно m испытаний завершатся успешным исходом, равна***

$$\boxed{C_n^m p^m (1-p)^{n-m}} \qquad (1)$$

Например, в схеме Бернулли с параметрами $n = 5$ и $p = \frac{1}{3}$ вероятность двух успешных исходов, т. е. того, что $m = 2$, равна $C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{80}{243}$.

Обратите внимание на то, что выражение $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ напоминает слагаемое формулы бинома Ньютона. Это не случайно. Если обозначить $q = 1 - p$ и записать формулу бинома Ньютона для выражения $(q + p)^n$, то получим:

$$(q + p)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + C_n^2 q^{n-2} p^2 + \ldots + p^n. \tag{2}$$

В правой части записанного равенства $(m + 1)$-е слагаемое имеет вид $C_n^m q^{n-m} p^m = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$ и совпадает с выражением (1).

Формула (2) имеет вероятностную интерпретацию. С одной стороны, поскольку $q = 1 - p$, то выражение в левой части равно единице. С другой стороны, слагаемые в правой части равны вероятностям того, что в схеме Бернулли ровно m испытаний завершатся успешным исходом. Так, первое слагаемое соответствует значению $m = 0$, второе слагаемое — значению $m = 1$ и т. д., последнее слагаемое — значению $m = n$. Поскольку значение m при всех возможных результатах опыта будет равно одному из целых чисел от 0 до n, то сумма в правой части равенства (2) задаёт вероятность достоверного события.

Пример 2. Фермерское хозяйство поставляет картофель в торговую сеть. Вероятность того, что наугад выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети по массе и форме, равна 80 %. Найдите вероятность того, что из 20 наугад выбранных картофелин ровно 16 удовлетворят требованиям торговой сети.

Решение. Условие задачи можно описать схемой Бернулли.

Действительно, при случайном выборе картофелины возможны два исхода:

«У» — выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети (успешный исход);

«Н» — выбранная картофелина не удовлетворяет требованиям торговой сети (неудачный исход).

Вероятность исхода «У» по условию задачи равна $p = 0{,}8$. Данное испытание повторяют 20 раз, т. е. $n = 20$, при этом необходимо выяснить вероятность того, что из этих 20 испытаний 16 завершатся исходом «У», то есть $m = 16$.

Используя формулу (1), получаем, что искомая вероятность равна

$$C_{20}^{16} \cdot 0{,}8^{16} \cdot 0{,}2^4 \approx 0{,}22. \ \blacksquare$$

Пусть случайная величина x равна количеству успешных испытаний в схеме Бернулли с параметрами n и p. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Множество значений случайной величины x равно $\{0, 1, 2, ..., n\}$. Из формулы (1) следует, что вероятность того, что случайная величина x принимает значение m, равна $C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$, то есть $P(x = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$. Последовательно подставляя в эту формулу значения m, равные 0, 1, 2, ..., n, составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Значение x	0	1	2	...	n
Вероятность	$(1-p)^n$	$C_n^1 p(1-p)^{n-1}$	$C_n^2 p^2(1-p)^{n-2}$	...	p^n

Поскольку каждое из выражений $C_n^m p^m(1-p)^{n-m}$ является одним из слагаемых разложения выражения $(p+q)^n$, где $q=1-p$, по формуле бинома Ньютона, то такое распределение вероятностей называют **биномиальным распределением** с параметрами n и p.

В частности, если случайная величина имеет биномиальное распределение с параметрами $n=1$ и p (происходит одно испытание Бернулли), то говорят, что случайная величина имеет **распределение Бернулли** с параметром p.

Пример 3. В некотором испытании случайное событие A происходит с вероятностью p. Испытание повторяют 10 раз (каждое из 10 испытаний проходит независимо от результатов остальных испытаний). Какова вероятность того, что в этих 10 испытаниях событие A произойдёт не менее двух раз?

Решение. Пусть случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n=10$ и p. Тогда требуемая в задаче вероятность равна $P(x \geqslant 2)$. Имеем:

$$P(x \geqslant 2) = 1 - P(x < 2) = 1 - \big(P(x=1) + P(x=0)\big).$$

Вероятность того, что $x=1$, равна $C_{10}^1 p(1-p)^9 = 10p(1-p)^9$.

Вероятность того, что $x=0$, равна $C_{10}^0 p^0(1-p)^{10} = (1-p)^{10}$.

Таким образом,

$$P(x \geqslant 2) = 1 - \left(10p(1-p)^9 + (1-p)^{10}\right) = 1 - (1-p)^9(1+9p).$$

Ответ: $1-(1-p)^9(1+9p)$. ■

Пример 4. При перевозке партии из 20 000 электролампочек, в которой 500 бракованных, разбилось 40 лампочек. Какова вероятность того, что среди разбитых лампочек оказались: 1) 2 бракованные; 2) k бракованных, где $0 \leqslant k \leqslant 40$?

Решение. Мы уже встречались с подобной задачей в § 20. Каждый набор из 40 лампочек представляет собой 40-элементное подмножество множества всех 20 000 лампочек. Поэтому пространство равновозможных элементарных исходов состоит из $C_{20\,000}^{40}$ наборов.

Количество таких 40-элементных подмножеств, среди которых k элементов соответствуют бракованным лампочкам, равно $C_{500}^{k}C_{19\,500}^{40-k}$. Поэтому если x — случайная величина, равная количеству бракованных лампочек среди разбитых, то $P(x=k)=\dfrac{C_{500}^{k}C_{19\,500}^{40-k}}{C_{20\,000}^{40}}$. В частности, при $k=2$ получаем:

$$P(x=2)=\frac{C_{500}^{2}C_{19\,500}^{38}}{C_{20\,000}^{40}}. \qquad (3)$$

Задачи, подобные примеру 4, достаточно часто возникают в теории вероятностей. Говорят, что случайная величина x, описанная в решении этой задачи, имеет **гипергеометрическое распределение** с параметрами $N = 20\ 000$, $D = 500$ и $n = 40$. Более подробно со свойствами этого распределения вы сможете ознакомиться, если примете участие в работе над проектом «Гипергеометрическое распределение и его свойства».

Обратим внимание, что так же, как и в примере 2 § 20, пользоваться на практике полученным результатом формулы (3) затруднительно, поскольку присутствующие в нём биномиальные коэффициенты приводят к числам большой разрядности. Однако эту задачу можно решить с приемлемой точностью, если воспользоваться схемой Бернулли и биномиальным распределением.

Представим себе, что 40 лампочек разбивались последовательно одна за другой. Поскольку число 40 мало по сравнению с 20 000 и 500, то будем считать, что на каждом из 40 шагов вероятность того, что разобьётся бракованная лампочка, не зависит от результатов, полученных на других шагах, и равна $p=\dfrac{500}{20\,000}=0{,}025$. Поэтому, если случайная величина y имеет биномиальное распределение с параметрами $n=40$ и $p=0{,}025$, то можно считать, что

$$P(x=2)\approx P(y=2)=C_{40}^{2}p^2(1-p)^{38}=780p^2(1-p)^{38}\approx 18{,}63\ \%.$$

Отметим, что точное значение $P(x=2)$, найденное по формуле (3) с помощью специальных программ, даёт результат: $P(x=2)=18{,}64\ldots\%$. ■

1. Что называют испытанием Бернулли?

2. Что называют схемой Бернулли?

3. По какой формуле можно найти вероятность количества успешных исходов в схеме Бернулли?

4. Что называют биномиальным распределением?

5. Что называют распределением Бернулли?

Упражнения

22.1. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

1) $n = 10$, $p = \frac{1}{4}$, $m = 2$;

2) $n = 8$, $p = 0{,}8$, $m = 8$;

3) $n = 5$, $p = 40$ %, $m = 3$.

22.2. Найдите вероятность того, что в схеме Бернулли с параметрами n и p число успешных исходов равно m, если:

1) $n = 8$, $p = \frac{1}{2}$, $m = 3$;

2) $n = 5$, $p = 0{,}2$, $m = 0$;

3) $n = 4$, $p = 70$ %, $m = 2$.

22.3. Случайная величина t имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0{,}4$. Какое из значений случайной величины наиболее вероятное?

22.4. Случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 4$ и $p = 75$ %. Какое из значений случайной величины наименее вероятное?

22.5. Сколько элементарных исходов в схеме Бернулли с параметрами:

1) $n = 3$ и $p = 0{,}7$; 2) $n = 8$ и $p = 0{,}3$?

22.6. Монету подбрасывают 8 раз и при каждом подбрасывании записывают, какой стороной упала монета. Сколько элементарных исходов этого опыта благоприятствует событию «монета выпала гербом ровно 6 раз из 8»?

22.7. Игральный кубик подбрасывают 10 раз и при каждом подбрасывании записывают, выпала ли шестёрка. Сколько элементарных исходов этого опыта благоприятствует событию «шестёрка выпала 3 раза из 10»?

22.8. Какова вероятность того, что из 5 бросков игрального кубика шестёрка выпадет ровно 2 раза?

22.9. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что ровно 3 раза выпадет герб?

22.10. Стрелок попадает в мишень с вероятностью p. Найдите вероятность того, что из 9 выстрелов стрелок попадёт в мишень ровно 6 раз.

22.11. Вероятность того, что станок изготовит бракованную деталь, равна p. Какова вероятность того, что из 15 деталей ровно 2 будут бракованными?

22.12. Тест состоит из 8 вопросов. Вероятность того, что ученик правильно ответит на отдельно взятый вопрос, равна 80 %. Найдите вероятность того, что ученик правильно ответит на 5 вопросов.

22.13. В новой квартире вкрутили 10 новых лампочек. Вероятность того, что лампочка проработает не менее года, составляет 0,9. Какова вероятность того, что в течение года придётся заменить ровно 3 лампочки?

22.14. При игре в теннис Андрей в среднем выигрывает у Сергея 3 гейма из 5. Какова вероятность того, что из 6 геймов Андрей выиграет ровно 2 гейма?

22.15. Есть r ящиков, в каждом из которых лежат n чёрных и m белых шаров. Из каждого ящика наугад берут по одному шару. Какова вероятность того, что среди взятых шаров будет ровно k чёрных?

22.16. В r вагонов электрички случайным образом садятся n пассажиров. Какова вероятность того, что в первом вагоне окажется k из этих пассажиров?

22.17. Случайная величина z имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 7$ и $p = 0{,}5$. Найдите:

1) $P(z \leqslant 1)$; 2) $P(2 \leqslant z < 5)$.

22.18. Случайная величина z имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 5$ и $p = 0{,}8$. Найдите:

1) $P(z > 3)$; 2) $P(1 < z \leqslant 3)$.

22.19. Случайная величина z имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 100$ и $p = 0{,}64$. Найдите, при каком значении k вероятность события $P(z = k)$ будет наибольшей.

22.20. Случайная величина z имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 50$ и $p = 0{,}15$. Найдите, при каком значении k вероятность события $P(z = k)$ будет наименьшей.

22.21. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании выступлений российских школьников на олимпиадах прошлых лет был сделан вывод, что для российского школьника вероятность получить золотую медаль на олимпиаде составляет около 65 %. Оцените вероятность того, что на очередной Международной математической олимпиаде команда России завоюет не менее 5 золотых медалей.

22.22. Во время эпидемии гриппа вероятность того, что врач, контактирующий с больными, сам заболеет в течение недели, равна 0,08. Найдите вероятность того, что из 25 лечащих врачей поликлиники в течение недели заболеет не меньше 2 человек.

22.23. Гроссмейстер проводит сеанс одновременной игры в шахматы на 40 досках. Вероятность того, что гроссмейстер выиграет каждую отдельную партию, равна 97 %. Какова вероятность того, что в сеансе гроссмейстер выиграет не менее 38 партий?

22.24. Для рекламы прохладительного напитка производитель решил закрыть крышками со скрытой надписью «приз» 30 000 бутылок из 500 000 выпущенных. Серёжа, который любит этот напиток, планирует за лето выпить 45 бутылок напитка. Какова вероятность того, что Серёжа соберёт не меньше 2 крышек с надписью «приз»? Ответ округлите до десятых процента.

22.25. В некоторой стране около 100 млн избирателей, из которых партию A поддерживают около 20 млн. Какова вероятность того, что среди 10 человек, опрошенных наугад, партию A поддержат от 1 до 3 человек? Ответ округлите до 1 %.

§ 23 Характеристики случайной величины

Пусть случайная величина x равна величине месячной прибыли некоторой фирмы. Аналитики прогнозируют такое распределение вероятностей случайной величины x в следующем месяце:

Значение x (тыс. р.)	–500	–40	110
Вероятность	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{7}{10}$

Из таблицы видно, что при одном стечении обстоятельств фирма получит прибыль, при других — убыток. Какую величину прибыли следует ожидать в следующем месяце?

Для ответа на этот вопрос будем рассуждать так. Предположим, что владелец фирмы имеет не одну такую фирму, а десять одинаковых фирм. Вероятность получить убыток 500 тыс. р. равна $\frac{1}{10}$. Поэтому будем считать, что только одна из десяти рассматриваемых фирм получит в следующем месяце убыток 500 тыс. р. Рассуждая аналогично, считаем, что две фирмы получат убыток по 40 тыс. р., а каждая из семи оставшихся — прибыль 110 тыс. р. Общая прибыль всех десяти фирм вместе будет равна $(-500) \cdot 1 + (-40) \cdot 2 + 110 \cdot 7$ (тыс. р.), а значит, на каждую из них придётся

$$(-500) \cdot \frac{1}{10} + (-40) \cdot \frac{2}{10} + 110 \cdot \frac{7}{10} = 19 \text{ (тыс. р.).}$$

Характеристика 19 тыс. р. показывает ожидаемый уровень прибыли каждой такой фирмы в следующем месяце. Эту характеристику называют **математическим ожиданием** случайной величины x и обозначают $M(x)$. Таким образом, $M(x) = 19$.

Обратите внимание на выражение $(-500) \cdot \frac{1}{10} + (-40) \cdot \frac{2}{10} + 110 \cdot \frac{7}{10}$, с помощью которого было вычислено математическое ожидание $M(x)$. Несложно заметить, что для вычисления $M(x)$ каждое из значений случайной величины x нужно умножить на вероятность наступления этого значения и все полученные произведения сложить.

Определение

Пусть случайная величина x имеет следующее распределение вероятностей:

Значение x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятность	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Число $M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + \ldots + x_np_n$ называют математическим ожиданием случайной величины x.

Пример 1. Страховой полис[1] предполагает выплаты в случае незначительного повреждения автомобиля (поломка кондиционера или повреждение лобового стекла) или его угона. В случае незначительного повреждения размер выплат составит 25 тыс. р., а в случае угона — 500 тыс. р. По опыту прошлых лет известно, что незначительные повреждения наступают с вероятностью 6 %, а угон происходит с вероятностью 0,1 %. На продаже каждого полиса страховая компания планирует заработать по 3 тыс. р. Определите, какую цену полиса должна назначить за него страховая компания.

Решение. Рассмотрим случайную величину x, равную размеру выплат страховой компанией по страховому полису. Составим таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

[1] Документ, по которому страховая компания обязуется выплатить владельцу полиса определённые денежные суммы при наступлении предусмотренных страховых случаев.

Значение x (тыс. р.)	0	25	500
Вероятность	0,939	0,06	0,001

Найдём математическое ожидание случайной величины x. Имеем:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}939 + 25 \cdot 0{,}06 + 500 \cdot 0{,}001 = 2.$$

Величина $M(x) = 2$ показывает, что ожидаемый размер выплат по каждому полису составит 2 тыс. р. Поскольку страховая компания планирует зарабатывать по 3 тыс. р. на каждом полисе, то она должна установить цену такого полиса в 5 тыс. р.

Ответ: 5 тыс. р. ■

Заметим, что при решении примера 1 множество элементарных исходов рассматриваемого эксперимента «осталось за кадром». В этой задаче множество элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ состояло из таких элементов:

ω_1 — отсутствие страховых случаев,
ω_2 — поломка кондиционера,
ω_3 — повреждение лобового стекла,
ω_4 — угон автомобиля.

Если вероятность поломки кондиционера составляет, например, 2 %, то тогда вероятность повреждения лобового стекла равна 4 %. Теперь можно составить таблицу размеров выплат и вероятностей в зависимости от страховых случаев (элементарных исходов эксперимента).

Элементарные исходы	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Значение x (тыс. р.)	0	25	25	500
Вероятность	0,939	0,02	0,04	0,001

Математическое ожидание $M(x)$ случайной величины x можно найти, пользуясь и этой таблицей. Имеем:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}939 + 25 \cdot 0{,}02 + 25 \cdot 0{,}04 + 500 \cdot 0{,}01 = 2.$$

Таким образом, *математическое ожидание можно находить как по таблице распределения вероятностей случайной величины, так и по таблице значений случайной величины и вероятностей в зависимости от элементарных исходов эксперимента*.

Рассмотрим следующий пример.

При производстве автомобилей значительное внимание уделяют вопросам безопасности. Предположим, что некий автопроизводитель выбирает, какой системой безопасности оснастить новую модель автомобиля. В случае угрозы столкновения эффективность работы системы безопасности предлагают оценивать по шкале от 0 до 5, где 0 — автомобиль полностью разрушен, 5 — благодаря системе безопасности столкновения удалось избежать (люди и автомобиль не пострадали). После испытаний двух таких систем инженеры составили таблицы.

Эффективность работы первой системы безопасности	0	1	2	3	4	5
Вероятность, %	5	0	0	0	0	95

Эффективность работы второй системы безопасности	0	1	2	3	4	5
Вероятность, %	0	0	0	0	25	75

Какой системе отдать предпочтение?

Пусть x — случайная величина, описывающая работу первой системы безопасности, т. е. x принимает значения от 0 до 5, распределённые согласно первой таблице. Аналогично y — случайная величина, описывающая работу второй системы безопасности. Для того чтобы оценить эффективность работы каждой из систем, найдём математические ожидания этих случайных величин. Имеем:

$$M(x) = 0 \cdot 0{,}05 + 5 \cdot 0{,}95 = 4{,}75,$$
$$M(y) = 4 \cdot 0{,}25 + 5 \cdot 0{,}75 = 4{,}75.$$

Поскольку математические ожидания обеих случайных величин равны, то в среднем обе системы работают с одинаковой эффективностью. Однако автопроизводитель скорее выберет вторую систему как более надёжную. Действительно, при работе первой системы в 5 % случаев могут погибнуть люди, при работе же второй системы, даже в наихудшем случае, люди существенно не пострадают. Это можно описать иначе: среди значений случайной величины x чаще будут встречаться числа, значительно отличающиеся от среднего (математического ожидания), чем у случайной величины y.

В теории вероятностей существуют характеристики, количественно описывающие такие понятия, как «кучность», «разброс» и т. д. Познакомимся с одной из них.

Определение

Дисперсией случайной величины x называют математическое ожидание случайной величины $(x - M(x))^2$.

Дисперсию случайной величины x обозначают $D(x)$, т. е. $D(x) = M((x - M(x))^2)$.

Пример 2. Найдите дисперсию случайной величины x, если её распределение вероятностей имеет вид

Значение x	20	30	70
Вероятность, %	40	50	10

Решение. Имеем: $M(x) = 20 \cdot 0,4 + 30 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,1 = 30$.

Рассмотрим случайную величину $x - M(x) = x - 30$. Её распределение вероятностей имеет вид

Значение $x - M(x)$	-10	0	40
Вероятность, %	40	50	10

Теперь найдём распределение вероятностей случайной величины $(x - M(x))^2$. Получаем:

Значение $(x - M(x))^2$	100	0	1600
Вероятность, %	40	50	10

Осталось найти математическое ожидание случайной величины $(x - M(x))^2$:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) = 100 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,5 + 1600 \cdot 0,1 = 200.$$

Ответ: 200. ■

Дисперсия является мерой рассеивания. Это означает, что дисперсия показывает, в какой степени значения, принимаемые случайной величиной, будут «разбросаны» (или ещё говорят: «рассеяны») по координатной прямой. Чем дисперсия больше, тем больший «разброс» получаемых значений следует ожидать.

Например, если подсчитать дисперсии случайных величин x и y в рассмотренном примере о безопасности автомобиля, то дисперсия величины x окажется большей. Убедитесь в этом самостоятельно.

В то же время числовое значение дисперсии само по себе не очень информативно. В примере 2 множество значений случайной величины x состояло из чисел 20, 30 и 70. Эти числа могли выражать, например, ожидаемый размер годовой премии (в тыс. р.) какого-то работника. Числовое значение дисперсии $D(x) = 200$ сложно интерпретировать в денежном эквиваленте. Причина состоит в том, что дисперсия представляет собой ожидаемое значение *квадрата* отклонения исходной величины от её математического ожидания. Т. е. в нашем примере дисперсия измеряется в *квадратных рублях*! Много это или мало — 200 тысяч квадратных рублей — сказать сложно.

Чтобы избежать этой проблемы, в теории вероятностей используют и другие меры рассеивания. Например, размерность исходной величины имеет следующие характеристики:

$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ — **стандартное отклонение,**

$|\Delta(x)| = M|x - M(x)|$ — **среднее абсолютное отклонение.**

Сформулируем некоторые свойства математического ожидания и дисперсии.

1. Если $x = c$, где c — константа, то $M(x) = c$ и $D(x) = 0$.

2. Если $M(x)$ и $D(x)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины x, а c — константа, то

$$M(x + c) = M(x) + c$$
$$\text{и } D(x + c) = D(x).$$

3. Если $M(x)$ и $D(x)$ — математическое ожидание и дисперсия случайной величины x, а c — константа, то

$$M(cx) = cM(x)$$
$$\text{и } D(cx) = c^2D(x).$$

Докажем, например, первое свойство. Если случайная величина x равна константе c, то это означает, что её распределение вероятностей имеет вид:

Значение x	c
Вероятность, %	100

Поэтому

$$M(x) = c \cdot 1 = c.$$

Найдём дисперсию случайной величины x. Имеем:

$$D(x) = M((x - M(x))^2) = M((c - c)^2) = M(0) = 0.$$

Путь доказательства второго и третьего свойств наметим в следующем примере.

Пример 3. Множество значений случайной величины x состоит из трёх чисел. Докажите, что для произвольной константы c выполняются равенства:

$$M(x+c)=M(x)+c \text{ и } M(cx)=cM(x).$$

Решение. Пусть распределение вероятностей случайной величины x имеет вид:

Значение x	x_1	x_2	x_3
Вероятность	p_1	p_2	p_3

Тогда по определению математического ожидания получаем:

$$M(x)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3.$$

Рассмотрим случайные величины $x+c$ и cx. Их распределение вероятностей задаётся следующей таблицей.

Значение $x+c$	x_1+c	x_2+c	x_3+c
Значение cx	cx_1	cx_2	cx_3
Вероятность	p_1	p_2	p_3

Учитывая, что $p_1+p_2+p_3=1$, получаем:

$$M(x+c)=(x_1+c)p_1+(x_2+c)p_2+(x_3+c)p_3=$$
$$=(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)+c(p_1+p_2+p_3)=M(x)+c$$

и

$$M(cx)=cx_1p_1+cx_2p_2+cx_3p_3=c(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)=cM(x).$$

Заметим, что формула $M(cx)=cM(x)$ доказана для $c\neq 0$. Случай $c=0$ рассмотрите самостоятельно. ■

Используя доказанные свойства математического ожидания, докажем, что $D(x+c)=D(x)$ и $D(cx)=c^2D(x)$. Имеем:

$$D(x+c)=M(((x+c)-M(x+c))^2)=$$
$$=M((x+c-M(x)-c)^2)=M((x-M(x))^2)=D(x)$$

и

$$D(cx)=M((cx-M(cx))^2)=M((cx-cM(x))^2)=M(c^2(x-M(x))^2)=$$
$$=c^2M((x-M(x))^2)=c^2D(x).$$

Пример 4. О случайной величине x известно, что $M(x)=1$, $\sigma(x)=2$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины $y=3x-5$.

Решение. Имеем: $D(x) = \sigma^2(x) = 4$. Используя свойства математического ожидания и дисперсии, получаем:

$$M(y) = M(3x - 5) = M(3x) - 5 = 3M(x) - 5 = 3 \cdot 1 - 5 = -2,$$

$$D(y) = D(3x - 5) = D(3x) = 3^2 D(x) = 9 \cdot 4 = 36.$$

Ответ: $M(y) = -2$, $D(y) = 36$. ■

1. Что называют математическим ожиданием случайной величины?

2. Что называют дисперсией случайной величины?

3. Что называют стандартным отклонением случайной величины?

4. Что называют средним абсолютным отклонением случайной величины?

5. Сформулируйте свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины.

Упражнения

23.1. О случайной величине x известно, что $M(x) = 5$, $D(x) = 3$. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины y, равной:

1) $x - 3$; 2) $2x$; 3) $-x + 1$; 4) $\dfrac{x + 4}{3}$.

23.2. О случайной величине x известно, что $M(x) = -2$, $\sigma(x) = 1$. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины:

1) $x + 1$; 2) $-4x$; 3) $2x - 3$; 4) $\dfrac{5 - 2x}{3}$.

23.3. На карте с масштабом 1 : 10 000 линейкой измеряют расстояние между точками A и B. Случайная величина x равна измеренному расстоянию (в сантиметрах). Известно, что $M(x) = 7$, $D(x) = 0{,}1$. Оцените расстояние на местности между пунктами A и B (в метрах). Чему равна дисперсия величины, равной вычисленному расстоянию между пунктами A и B на местности?

23.4. Российский школьник Андрей и его американский друг Джон из Бостона увлекаются метеорологией. В своём письме Джон сообщает, что температура в Бостоне является случайной величиной с математическим ожиданием 50 °F и стандартным отклонением 9 °F. Андрей знает, что перевести температуру из шкалы Фаренгейта в шкалу Цельсия можно по формуле: $t_C = \dfrac{5}{9}(t_F - 32)$. Чему равны математическое ожидание и стандартное отклонение температуры в Бостоне, измеренной по шкале Цельсия?

23.5. Случайная величина x имеет следующее распределение вероятностей:

Значение x	1	2	6
Вероятность, %	0,4	0,5	0,1

Найдите:
1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) стандартное отклонение;
4) среднее абсолютное отклонение.

23.6. Случайная величина y имеет следующее распределение вероятностей:

Значение x	–2	5	19
Вероятность, %	0,6	0,1	0,3

Найдите:
1) математическое ожидание;
2) дисперсию;
3) стандартное отклонение;
4) среднее абсолютное отклонение.

23.7. Монету подбрасывают один раз. Случайная величина x равна 1, если выпал герб, и 0, если выпало число. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины x.

23.8. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа очков, выпадающих при подбрасывании игрального кубика.

23.9. Пусть случайная величина x имеет распределение Бернулли с параметром p. Докажите, что

$$M(x) = p, \quad D(x) = p(1 - p).$$

23.10. Пусть a — некоторое число. Известно, что каждое значение случайной величины не меньше a. Может ли её математическое ожидание оказаться меньшим a?

23.11. Пусть x — случайная величина и $M(x^2) = 0$. Найдите $M(x)$.

23.12. Таблица распределения вероятностей выигрыша в азартной игре имеет вид:

Величина выигрыша, р.	0	100	300	1500
Вероятность, %	80	15	4	1

Цена билета для участия в игре составляет 50 р. Стоит ли играть в такую игру?

23.13. Фермер, выращивающий горох, сомневается, использовать ли ему семена нового сорта. Цена семян нового сорта такова, что их имеет смысл использовать только в том случае, если урожайность гороха увеличится на 10 %. Собрав урожай с двух экспериментальных участков, фермер оценил распределение количества горошин в стручке гороха старого и нового сортов:

Количество горошин в стручке гороха	2	3	4	5	6	7	8
Вероятность для гороха старого сорта, %	12	13	20	26	18	6	5
Вероятность для гороха нового сорта, %	2	5	18	21	27	23	4

Стоит ли фермеру использовать семена нового сорта?

23.14. Общественная организация проводит беспроигрышную лотерею, прибыль от которой пойдёт на благотворительные цели. Каждый участник лотереи жертвует 500 р. и получает за это лотерейный билет, внутри которого написана сумма денежного приза. Таблица распределения вероятностей суммы приза имеет вид:

Сумма приза, р.	100	200	400	1000	5000
Вероятность	0,5	0,3	0,15	0,03	0,02

Оплата призов происходит за счёт пожертвованных средств. Какую сумму для благотворительных целей ожидает получить организация с одного лотерейного билета?

23.15. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании результатов выступлений команды за прошлые годы распределение вероятностей количества золотых медалей, завоёванных командой на олимпиаде, можно оценить так:

Количество золотых медалей в команде	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность, %	0	0	20	20	30	20	10

Найдите математическое ожидание и дисперсию количества золотых медалей команды России на очередной Международной математической олимпиаде.

23.16. В сборную команду России на Международной математической олимпиаде входит 6 человек. На основании результатов выступлений команды за прошлые годы распределение вероятностей количества серебряных медалей, завоёванных командой на олимпиаде, можно оценить так:

Количество серебряных медалей в команде	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность, %	10	25	45	15	5	0	0

Найдите математическое ожидание и дисперсию количества серебряных медалей команды России на очередной Международной математической олимпиаде.

23.17. Случайная величина x равна количеству препаратов, проданных аптекой одному покупателю за одну покупку. Известно, что множество значений случайной величины x равно $\{0, 1, ..., 6\}$ и $P(x = k) = a(6k - k^2)$ для всех $k = 0, 1, ..., 6$. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение количества препаратов, проданных аптекой одному покупателю за одну покупку.

23.18. Случайная величина y равна количеству школьников на очередном занятии математического кружка. Известно, что множество значений случайной величины y равно $\{5, 6, 7\}$ и $P(y = k) = ak$ для всех $k = 5, 6, 7$. Найдите математическое ожидание и среднее абсолютное отклонение количества школьников на занятии математического кружка.

23.19. Коммерческая фирма может совершить некоторую сделку. В этом случае прогноз её прибыли на ближайший месяц определяется следующей таблицей:

Прибыль фирмы, тыс. р.	–5000	–400	1100
Вероятность, %	10	20	70

Если же сделка не будет заключена, то прибыль фирмы определяется следующей таблицей:

Прибыль фирмы, тыс. р.	–110	10	350
Вероятность, %	20	20	60

При каком решении ожидаемый уровень прибыли будет выше? Какое решение менее рискованное?

23.20. Чему равно математическое ожидание и дисперсия количества выпавших шестёрок при подбрасывании трёх игральных кубиков?

23.21. Чему равно математическое ожидание и стандартное отклонение количества выпавших гербов при подбрасывании пяти монет?

23.22. Вероятность забить пенальти (штрафной 11-метровый удар в футболе) равна p.

1) Составьте таблицу распределения вероятностей количества забитых мячей в серии из пяти пенальти.

2) С точностью до 1 % вычислите вероятности из составленной таблицы распределения, если $p = 0{,}8$.

3) Основываясь на полученных во втором задании приближённых значениях вероятностей, оцените математическое ожидание и стандартное отклонение количества забитых мячей в серии из пяти пенальти.

23.23. Из большой коробки с конфетами, среди которых 30 % шоколадных, Карлсон наугад вынимает 4 конфеты.

1) Составьте таблицу распределения вероятностей количества шоколадных конфет у Карлсона.

2) Оцените математическое ожидание и дисперсию количества шоколадных конфет у Карлсона.

§ 24 Математическое ожидание суммы случайных величин

Игральный кубик подбрасывают дважды. Пусть x — случайная величина, равная количеству очков на кубике при первом подбрасывании, а y — при втором. Каждое из своих значений, т. е. числа от 1 до 6, случайные величины x и y принимают с вероятностью $\frac{1}{6}$. Поэтому

$$M(x) = M(y) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Чему равно математическое ожидание случайной величины $x + y$? Естественно предположить, что если значение каждой из случайных величин x и y в среднем равно 3,5, то ожидаемое значение их суммы должно быть равным $3,5 + 3,5 = 7$.

Подтвердить наше предположение позволяет следующая теорема.

Теорема 24.1

Пусть в некотором опыте рассматривают случайные величины x и y с математическими ожиданиями $M(x)$ и $M(y)$. Тогда математическое ожидание случайной величины $x + y$ равно сумме математических ожиданий случайных величин x и y, т. е.

$$M(x + y) = M(x) + M(y). \qquad (1)$$

Доказательство теоремы проведём для случая, когда пространство элементарных исходов состоит из конечного множества элементов $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$.

Доказательство

Составим таблицу значений случайных величин x, y и $x + y$, а также их вероятностей в зависимости от элементарного исхода испытания.

Элементарный исход	ω_1	ω_1	...	ω_n
Значение x	x_1	x_2	...	x_n
Значение y	y_1	y_2	...	y_n
Значение $x + y$	$x_1 + y_1$	$x_2 + y_2$	...	$x_n + y_n$
Вероятность	p_1	p_2	...	p_n

Пользуясь данными этой таблицы, запишем математические ожидания $M(x)$, $M(y)$ и $M(x + y)$. Имеем:

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n,$$
$$M(y) = y_1p_1 + y_2p_2 + \ldots + y_np_n,$$
$$M(x + y) = (x_1 + y_1)p_1 + (x_2 + y_2)p_2 + \ldots + (x_n + y_n)p_n.$$

Видим, что сумма полученных значений $M(x)$ и $M(y)$ равна $M(x + y)$, что и требовалось доказать. ■

Аналогичная формула верна и для большего количества случайных величин:

$$\boxed{M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_n)} \qquad (2)$$

Используя метод математической индукции, докажите её самостоятельно.

Пример 1. Игральный кубик подбрасывают 12 раз. Найдите математическое ожидание количества выпавших при этом шестёрок.

Решение. Пусть случайная величина x_1 равна количеству шестёрок, выпавших при первом броске. Понятно, что такая величина принимает одно из двух значений — 1 или 0 и имеет следующее распределение:

Значение x_1	0	1
Вероятность	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Поэтому $M(x_1) = 0 \cdot \frac{5}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

Аналогично рассмотрим величины x_2, x_3, ..., x_{12}, равные количеству выпавших шестёрок соответственно на втором, третьем, ..., двенадцатом броске. Ясно, что $M(x_2) = M(x_3) = \& = M(x_{12}) = \frac{1}{6}$.

Рассмотрим теперь случайную величину $y = x_1 + x_2 + \& + x_{12}$, равную количеству шестёрок, выпавших за все 12 бросков. Используя формулу (2), получаем:

$$M(y) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_{12}) = 12 \cdot \frac{1}{6} = 2.$$

Ответ: 2 шестёрки. ■

Решение этой задачи легко обобщить. Пусть случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеют распределение Бернулли с параметром p. Тогда $M(x_i) = p$. Поэтому

$$M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_n) = np.$$

Однако, как вы знаете из предыдущих параграфов, в этом случае случайная величина $y = x_1 + \ldots + x_n$ будет иметь биномиальное распределение с параметрами n и p. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 24.2

Математическое ожидание случайной величины x, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p, равно np.

Например, пусть вероятность забросить мяч в баскетбольную корзину равна 65 %. Сколько попаданий в корзину следует ожидать при

100 бросках? Теорема 24.2 позволяет утверждать, что естественный ответ — 65 попаданий — является правильным. Здесь число 65 равно математическому ожиданию случайной величины t, имеющей биномиальное распределение с параметрами $n = 100$ и $p = 0{,}65$.

Обратите внимание, что, пользуясь определением математического ожидания, получить такой результат довольно сложно. Для этого пришлось бы вычислить сумму:

$$M(t) = 0 \cdot C_{100}^{0}(1-p)^{100} + 1 \cdot C_{100}^{1}p(1-p)^{99} + \\ + 2 \cdot C_{100}^{2}p^{2}(1-p)^{98} + \ldots + 100 \cdot C_{100}^{100}p^{100}.$$

Пример 2. Пусть $D(x)$ — дисперсия случайной величины x. Докажите, что $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$.

Решение. По определению дисперсии $D(x) = M((x - M(x))^2)$. Раскроем скобки и воспользуемся формулой (2). Получаем:

$$D(x) = M(x^2 - 2xM(x) + (M(x))^2) = M(x^2) + M(-2xM(x)) + M((M(x))^2). \quad (3)$$

Упростим второе слагаемое. Поскольку $c = -2M(x)$ — константа, то, используя формулу $M(cx) = cM(x)$, получаем:

$$M(-2xM(x)) = -2M(x)M(x) = -2(M(x))^2.$$

Выражение $(M(x))^2$ также является константой, а значит, к нему можно применить формулу $M(c) = c$. Поэтому третье слагаемое формулы (3) можно переписать так: $M((M(x))^2) = (M(x))^2$.

Окончательно получаем:

$$D(x) = M(x^2) - 2(M(x))^2 + (M(x))^2 = M(x^2) - (M(x))^2. ■$$

Отметим, что для вычисления дисперсии формулу $D(x) = M(x^2) - (M(x))^2$ используют намного чаще, чем определение $D(x) = M((x - M(x))^2)$, поскольку расчёты получаются проще.

1. Чему равно математическое ожидание суммы случайных величин?
2. Чему равно математическое ожидание случайной величины, имеющей биномиальное распределение?

Упражнения

24.1. О случайных величинах x и y известно, что $M(x) = 5$, $M(y) = -2$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

1) $x - y$; 2) $2x + y$; 3) $\dfrac{5y - x}{4}$.

24.2. О случайных величинах x и y известно, что $M(x) = -1$, $M(y) = 4$. Найдите математическое ожидание случайной величины:

1) $x + y$; 2) $y - 2x$; 3) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}$.

24.3. О случайной величине x известно, что $M(x) = 3$, $M(x^2) = 16$. Найдите дисперсию случайной величины x.

24.4. О случайной величине x известно, что $M(x) = -3$, $\sigma(x) = 1$. Найдите математическое ожидание случайной величины $y = x^2$.

24.5. Чему равно математическое ожидание количества выпавших шестёрок при подбрасывании пяти игральных кубиков?

24.6. Чему равно математическое ожидание количества выпавших гербов, если монету подбросить 30 раз?

24.7. Вероятность забить пенальти (штрафной 11-метровый удар в футболе) равна p. Сколько забитых мячей следует ожидать в серии из 20 ударов при $p = 0{,}8$?

24.8. Вероятность события A в некотором испытании равна p. Проводят серию из n таких испытаний и подсчитывают частоту $x_n = \frac{n_A}{n}$ события A, где n_A — число испытаний в этой серии, в которых произошло событие A. Докажите, что $M(x_n) = p$.

24.9. Из большой коробки с конфетами, среди которых 30 % шоколадных, Карлсон наугад достаёт 50 конфет для своего завтрака. Чему равно математическое ожидание количества шоколадных конфет на завтраке у Карлсона?

24.10. Участники Олимпийских игр в соревнованиях по стрельбе из лука выполняют серию из 12 выстрелов. Побеждает спортсмен, который наберёт большую сумму очков. Таблица распределения количества очков, набираемых двумя стрелками за один выстрел, имеет вид:

Количество очков	10	9	8	7	6
Вероятность, I стрелок	0,48	0,36	0,08	0,05	0,03
Вероятность, II стрелок	0,46	0,40	0,10	0,03	0,01

У кого из этих спортсменов шансы победить больше? Найдите ожидаемое количество набранных очков для каждого из спортсменов.

24.11. Таблица распределения вероятностей выигрыша в лотерее имеет вид:

Величина выигрыша, р.	0	100	400	1200
Вероятность, %	70	20	9	1

Найдите ожидаемую величину выигрыша, если купить 15 лотерейных билетов.

24.12. О случайных величинах x и y известно, что $M(xy) = M(x)M(y)$. Докажите, что $D(x + y) = D(x) + D(y)$.

24.13. Докажите, что $M((x + M(x))^2) = M(x^2) + 3(M(x))^2$.

24.14. Деталь, выпускаемая на заводе, может оказаться бракованной с вероятностью $p = 0{,}1$. При автоматической проверке качества выпущенных деталей с вероятностью $\alpha = 0{,}4$ бракованную деталь принимают за качественную, а с вероятностью $\beta = 0{,}1$ — качественную за бракованную. Найдите математическое ожидание количества деталей, признанных качественными после автоматической проверки, в партии из 1000 штук.

24.15. По мишени производится 4 выстрела с разных расстояний. Вероятности попадания в мишень при этом соответственно равны: 18 %, 25 %, 60 % и 87 %. Найдите математическое ожидание количества попаданий в мишень.

24.16. Молокозавод собирает молоко у 1000 частных хозяйств и проводит анализ молока на наличие вредных бактерий. Для сокращения количества проводимых анализов предлагается следующая процедура. Молоко 7 хозяйств смешивается и проводится один анализ. Если он отрицательный, то считают, что анализы всех 7 хозяйств отрицательные. Если же он положительный, то молоко каждого из этих 7 хозяйств исследуется отдельно. После этого аналогично проводят анализ у следующих 7 хозяйств и т. д. Оцените математическое ожидание общего количества проведённых анализов, если вероятность того, что анализ отдельно взятого хозяйства окажется положительным, равна 2 %.

24.17. В настольной игре каждый ход фишку передвигают на несколько клеток вперёд. Это число определяют так: подбрасывают два игральных кубика и подсчитывают сумму выпавших на кубиках чисел. Найдите математическое ожидание числа клеток, на которое передвинут фишку за 10 ходов.

24.18. Каждый из 24 учащихся класса наугад называет натуральное число до 10 включительно. Найдите математическое ожидание суммы названных чисел.

24.19. Математическое ожидание случайной величины x равно нулю. Докажите, что $M(|x|) \leqslant \dfrac{D(x) + 1}{2}$.

24.20. Математическое ожидание случайной величины x равно нулю. Докажите, что $M(|x|) \leqslant D(x) + \dfrac{1}{4}$.

24.21. Друзья собрались праздновать Новый год. Каждый из компании подготовил один подарок. Все подарки сложили в мешок Деда Мороза и перемешали. За участие в конкурсах каждому из друзей досталось по одному подарку, выбранному случайным образом из мешка Деда Мороза. Чему равно математическое ожидание количества друзей, которым достался собственный подарок?

24.22. Тест по английскому языку состоит из 30 вопросов, к каждому из которых предложено по 3 варианта ответов. Два друга Коля Везунчиков и Петя Неудачников хорошо знают математику, но совершенно не знают английский язык. Поэтому они ответили на все вопросы наугад. Оказалось, что Коля дал 15 верных ответов, а Петя — только 6. Ребята хотят подсчитать, насколько Коля удачливее Пети. Для этого они решили найти математическое ожидание количества вопросов, на которые Коля дал правильный ответ, а Петя — неправильный. Чему равно это число?

24.23. Случайная величина x принимает только положительные значения. Докажите, что $M(x) \cdot M\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant 1.$

Глава

5 Повторение

Задачи на решение уравнений и неравенств являются наиболее распространёнными в школьном курсе математики. Поэтому первые три параграфа этой главы посвящены обобщению и систематизации этих типов задач. Четвёртый параграф этой главы содержит систему упражнений на повторение курсов математики 5–6, алгебры 7–9 и алгебры и начал анализа 10–11 классов.

§ 25 О появлении посторонних корней и потере решений уравнений

Вы знаете, что далеко не каждое преобразование уравнения сохраняет неизменным множество его корней. В одном случае это множество может сузиться, т. е. корни будут потеряны, в другом — расшириться, т. е. появятся посторонние корни.

Приведём несколько примеров.

- При переходе от уравнения $\log_2(x-1)^2 = 0$ к уравнению $2\log_2(x-1) = 0$ теряется корень $x = 0$.
- Возведение обеих частей уравнения $\sqrt{x} = -x$ в квадрат приводит к появлению постороннего корня $x = 1$.
- Заменяя уравнение $\log_x 4 = 2$ уравнением $x^2 = 4$, получаем посторонний корень $x = -2$.

Метод решения уравнения, при котором данное уравнение заменяют уравнением-следствием, а затем полученные корни подвергают проверке, называют **методом следствий**. Его применяют тогда, когда выполнить проверку несложно. Однако так бывает не всегда. Например, число $\frac{-2+6\sqrt{11}}{7}$ является корнем уравнения $\sqrt{2x-5}+\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+1}$, но, чтобы в этом убедиться, надо провести довольно большую вычислительную работу.

Для подобных ситуаций возможен другой путь решения — **метод равносильных преобразований**. С этим методом вы ознакомились в 10 классе, решая иррациональные уравнения.

Подчеркнём, что, применяя как метод следствий, так и метод равносильных преобразований, важно знать причины потери корней и появления посторонних корней. Рассмотрим некоторые из этих причин.

Изменение области определения уравнения

Вне области определения уравнения корней нет (рис. 25.1). Поэтому преобразование уравнения, при котором расширяется область его определения, может привести к появлению посторонних корней.

Рис. **25.1**

Например, областью определения уравнения $\log_x 4 = 2$ является множество $(0; 1) \cup (1; +\infty)$. Пользуясь определением логарифма, получаем уравнение $x^2 = 4$, областью определения которого является множество $\boldsymbol{R}$. Расширение области определения исходного уравнения привело к появлению постороннего корня $x = -2$.

Пример 1. Решите уравнение $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} = \cos^2 x - \sin 2x.$

Решение. Если дробь в левой части данного уравнения сократить на $\sin x + \cos x$, то получим уравнение $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x$. При таком преобразовании область определения исходного уравнения расширяется на множество чисел, которые являются корнями уравнения $\sin x + \cos x = 0$. Поэтому на самом деле данное в условии уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = \cos^2 x - \sin 2x, \\ \sin x + \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Преобразуем уравнение системы. Имеем:

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + \sin 2x = 0;$$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + 2 \sin x \cos x = 0;$$

$$\sin x(\sin x + \cos x) = 0.$$

Поскольку $\sin x + \cos x \neq 0$, то получаем: $\sin x = 0$. Отсюда $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Осталось заметить, что при $x = \pi n$ значение выражения $\sin x + \cos x$ отлично от нуля.

Ответ: πn, $n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Если расширение области определения уравнения может привести к появлению посторонних корней, то её сужение — возможная причина потери корней.

Например, областью определения уравнения $\log_2(x - 1)^2 = 0$ является множество $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, а областью определения уравнения $2\log_2(x - 1) = 0$ является множество $(1; +\infty)$. Множество $(-\infty; 1)$ содержит корень $x = 0$ первого уравнения. Поэтому при переходе от уравнения $\log_2(x - 1)^2 = 0$ к уравнению $2\log_2(x - 1) = 0$ этот корень потерян.

Часто причиной изменения множества корней уравнения является применение равенств, правая и левая части которых имеют разные области определения.

Приведём примеры таких равенств:

- $x = \dfrac{xy}{y}$;
- $x = (\sqrt{x})^2$;
- $\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$;
- $\operatorname{tg}(x + y) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$;
- $\sin 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$;
- $\log_a x^2 = 2\log_a x$.

В каждом из этих равенств область определения выражения, стоящего в правой части, является подмножеством области определения выражения, стоящего в левой части. Поэтому применение этих равенств слева направо может привести к потере корней, а справа налево — к появлению посторонних корней.

Пример 2. Решите уравнение $\sqrt{(x - 1)^2(x - 3)} = x - 1$.

Решение. Областью определения данного уравнения является множество $\{1\} \cup [3; +\infty)$. Очевидно, число 1 является корнем данного уравнения.

Однако применение формулы $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ приводит к уравнению

$$|x - 1|\sqrt{x - 3} = x - 1,$$

область определения которого — множество $[3; +\infty)$. Поэтому число 1 не является корнем полученного уравнения, т. е. такой переход ведёт к потере этого корня.

Решим данное уравнение методом равносильных переходов.

Данное в условии уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x-1)^2(x-3)=(x-1)^2,\\ x\geqslant 1.\end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases}(x-1)^2(x-4)=0,\\ x\geqslant 1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=4.\end{array}\right.$

Ответ: 1; 4. ■

Умножение обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную

Иногда бывает целесообразным умножить обе части уравнения на некоторое выражение. Рассмотрим последствия такого преобразования.

Перейдём от уравнения

$$f(x)=g(x)$$

к уравнению

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x).$$

При таком переходе множество корней уравнения может измениться под влиянием двух факторов: области определения функции φ и множества корней уравнения $\varphi(x)=0$.

Например, если обе части уравнения $x^2=4$ умножить на выражение $\sqrt{x}+1$ и перейти к уравнению $x^2(\sqrt{x}+1)=4(\sqrt{x}+1)$, то тем самым теряем корень -2. Если же обе части этого уравнения умножить на $\sqrt{x}$, то теряем корень -2 и одновременно получаем посторонний корень 0.

Следовательно, если при решении уравнения возникла потребность умножить обе его части на выражение $\varphi(x)$, то надо учитывать как область определения этого выражения, так и множество корней уравнения $\varphi(x)=0$.

Пример 3. Решите уравнение $(\sqrt{4+x}+2)(\sqrt{4+x}+2x-1)=12x$.

Решение. Умножим обе части данного уравнения на выражение $\sqrt{4+x}-2$. Поскольку $(\sqrt{4+x}+2)(\sqrt{4+x}-2)=x$, то получим:

$$x(\sqrt{4+x}+2x-1)=12x(\sqrt{4+x}-2). \qquad (1)$$

Это преобразование не изменяет области определения исходного уравнения. Появление же посторонних корней возможно за счёт корней уравнения $\sqrt{4+x}-2=0$. Следовательно, полученное уравнение (1) — следствие уравнения, данного в условии.

Уравнение (1) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ \sqrt{4+x}+2x-1=12\sqrt{4+x}-24. \end{array}\right.$$

Легко установить, что второе уравнение совокупности равносильно такому: $4x^2-29x+45=0$. Отсюда $x=5$ или $x=2{,}25$.

Осталось выполнить проверку. Легко убедиться, что числа 5 и 2,25 являются корнями данного в условии уравнения, а число 0 — нет.

Ответ: 5 или 2,25. ■

Переход от уравнения $f(x)=g(x)$ к уравнению $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$

Почему уравнения

$$x=2x-1 \text{ и } 2^x=2^{2x-1} \tag{2}$$

равносильны, а уравнения

$$x=2x-1 \text{ и } \sin x=\sin(2x-1) \tag{3}$$

не являются равносильными?

Дело в том, что свойства функции $y=2^t$ отличаются от свойств функции $y=\sin t$. Поясним, что имеется в виду.

Если определённая на $\boldsymbol{R}$ функция $y=\varphi(t)$ обратима, то равенство $t_1=t_2$ выполняется тогда и только тогда, когда $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$. Поэтому в этом случае уравнения $f(x)=g(x)$ и $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ равносильны.

Если же определённая на $\boldsymbol{R}$ функция $y=\varphi(t)$ не является обратимой, то из равенства $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ не обязательно следует, что $t_1=t_2$. Поэтому уравнение $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ является следствием уравнения $f(x)=g(x)$.

Так, уравнения (2) равносильны, потому что функция $\varphi(t)=2^t$ обратима. Поскольку функция $\varphi(t)=\sin t$ не является обратимой, то уравнения (3) не являются равносильными.

Вы знаете, что возведение обеих частей уравнения в чётную степень может привести к уравнению-следствию, а возведение в нечётную степень приводит к равносильному уравнению.

Это связано с тем, что функция $y=x^{2k}$, $k\in\boldsymbol{N}$, не является обратимой, а функция $y=x^{2k-1}$, $k\in\boldsymbol{N}$, — обратимая.

Функция $y=x^{2k}$, $k\in\boldsymbol{N}$, обратима на множестве $[0;+\infty)$. В 10 классе вы пользовались этим фактом в виде такой теоремы.

Теорема 25.1

Если для любого $x\in M$ выполняются неравенства $f(x)\geqslant 0$ и $g(x)\geqslant 0$, то уравнения $f(x)=g(x)$ и $(f(x))^{2k}=(g(x))^{2k}$, $k\in\boldsymbol{N}$, равносильны на множестве M.

Эту теорему вы использовали при решении иррациональных уравнений.

Рассмотрим пример, в котором появление постороннего корня связано с тем, что функция $y = \sin t$ не является обратимой.

Пример 4. Решите уравнение $\arcsin(x\sqrt{3}) = \arccos(5x - 2)$.

Решение. Поскольку определённая на $\boldsymbol{R}$ функция $y = \sin t$ не является обратимой, то уравнение $\sin(\arcsin(x\sqrt{3})) = \sin(\arccos(5x - 2))$ — следствие данного. Поэтому решение уравнения должно завершиться проверкой корней. Следовательно, можно не бояться далее переходить к новым уравнениям-следствиям.

Напомним, что имеют место равенства $\sin(\arcsin a) = a$ и $\sin(\arccos a) = \sqrt{1 - a^2}$. Поэтому можно записать:

$$x\sqrt{3} = \sqrt{1 - (5x - 2)^2}.$$

Отсюда $3x^2 = 1 - (5x - 2)^2$. Далее имеем:

$$28x^2 - 20x + 3 = 0; \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2}, \\ x = \dfrac{3}{14}. \end{array}\right.$$

Проверим полученные корни.

При $x = \dfrac{1}{2}$ имеем:

$\arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$; $\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\dfrac{5}{2} - 2\right) = \arccos\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$. Следовательно, число $\dfrac{1}{2}$ — корень исходного уравнения.

При $x = \dfrac{3}{14}$ имеем: $\arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin\dfrac{3\sqrt{3}}{14} < \dfrac{\pi}{2}$; $\arccos(5x - 2) = \arccos\left(\dfrac{15}{14} - 2\right) = \arccos\left(-\dfrac{13}{14}\right) > \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно, число $\dfrac{3}{14}$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$. ■

Упражнения

25.1. Равносильны ли уравнения:

1) $x - 5 = 0$ и $x(x - 5) = 0$;

2) $x + 2 = 2 + x$ и $\dfrac{x^2 + 2}{x^2 + 2} = 1$;

3) $\dfrac{x - 3}{x - 3} = 1$ и $x = x$;

4) $\frac{x^2-4}{x+2}=0$ и $x-2=0$;

5) $\frac{x^2-25}{x+2}=0$ и $x^2-25=0$;

6) $(\sqrt{x+2})^2=2x+5$ и $x+2=2x+5$;

7) $\sqrt{(x-1)(x-3)}=0$ и $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-3}=0$;

8) $\sin x=2$ и $2^x=-1$;

9) $\sin x=0$ и $\cos x=1$;

10) $\cos x=0$ и $\sin^2 x=1$;

11) $\frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=-1$ и $\cos 2x=-1$;

12) $\log_3 x^2=2$ и $\log_3 x=1$;

13) $\log_5(x^2-1)=\log_5(x-1)$ и $\log_5(x+1)=0$;

14) $\frac{\log_x(x+1)}{\log_x 2}=1$ и $\log_2(x+1)=1$?

25.2. Равносильны ли уравнения:

1) $x^2=2x$ и $x=2$;

2) $\frac{x+3}{x+3}=1$ и $\frac{x^2+3}{x^2+3}=1$;

3) $\frac{x+4}{x+4}=0$ и $\frac{x^2-16}{x^2-16}=0$;

4) $\cos x=-1{,}2$ и $e^x=0$;

5) $\cos x=0$ и $\sin x=1$;

6) $\frac{2\mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=0$ и $\sin 2x=0$;

7) $\sqrt{x^2(x-1)}=0$ и $|x|\sqrt{x-1}=0$;

8) $\log_{x^2} x^2=1$ и $\log_x x=1$?

25.3. Какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $|x|=2$ и $x^3=8$;

2) $\frac{x^2}{x-9}=\frac{81}{x-9}$ и $x^2=64$;

3) $x^2=25$ и $x^2-\frac{1}{x+5}=25-\frac{1}{x+5}$;

4) $\frac{x^2-49}{x+7}=0$ и $x^2-49=0$;

5) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x}$ и $x^2-2=3x$;

6) $\sqrt{x^2(x-1)}=x$ и $|x|\sqrt{x-1}=x$;

7) $\sqrt{x+3}=x$ и $x+3=x^2$;

8) $\sin x=3$ и $\log_2 x=1$;

9) $\lg(x^2-1)=\lg(x-1)^2$ и $x^2-1=(x-1)^2$;

10) $\frac{2\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x}=0$ и $\mathrm{tg}\, 2x=0$;

11) $\dfrac{1}{\log_x 2} = 0$ и $\log_2 x = 0$?

25.4. Какое из двух уравнений является следствием другого:

1) $x^2 + \dfrac{1}{x+10} = 100 + \dfrac{1}{x+10}$ и $x^2 = 100$;

2) $\sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{5x}$ и $x^2 - x - 1 = 5x$;

3) $\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{x+2}$ и $\sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = \sqrt{x+2}$;

4) $\sqrt{x+7} = -x$ и $x + 7 = x^2$;

5) $\cos x = -2$ и $e^{x^2 - x - 11} = 1$;

6) $\log_3|x+2| = 1$ и $\log_x|x+2| \cdot \log_3 x = 1$?

25.5. Как может измениться — расшириться или сузиться — множество корней данного уравнения, если:

1) уравнение $(|x| + 3)f(x) = 2|x| + 6$ заменить на уравнение $f(x) = 2$;

2) уравнение $(\operatorname{tg}^2 x + 1)f(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

3) уравнение $\dfrac{f(x)}{x^2+3} = 0$ заменить на уравнение $f(x) = 0$;

4) уравнение $\dfrac{f(x)}{\lg^2 x + 1} = 0$ заменить на уравнение $f(x) = 0$;

5) уравнение $(x+1)\,f(x) = 3\,(x+1)$ заменить на уравнение $f(x) = 3$;

6) уравнение $(\sqrt{x} - 1)\,f(x) = \sqrt{x} - 1$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

7) уравнение $\log_2 f(x) = 0$ заменить на уравнение $f(x) = 1$;

8) уравнение $\log_x f(x) = 0$ заменить на уравнение $f(x) = 1$?

25.6. Решите уравнение:

1) $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 5 = 0$; 2) $2x^2 + (\sqrt{x-1})^2 - 5 = 0$.

25.7. Решите уравнение:

1) $x^2 - (\sqrt{x+3})^2 - 8 = 0$; 2) $3x^2 - 11(\sqrt{2x-1})^2 - 4 = 0$.

25.8. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$; 2) $\dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = 0$; 3) $\dfrac{2\sin^2 x + 3\sin x}{1 - \cos x} = 0$.

25.9. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = 0$; 2) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \sin x} = 2\cos x$.

25.10. Решите уравнение $\sqrt{16 - 9x^2}\,(3\sin 2\pi x + 8\sin \pi x) = 0$.

25.11. Решите уравнение $\sqrt{25 - 4x^2}\left(\sin \pi x + 3\cos\dfrac{\pi x}{2}\right) = 0$.

25.12. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x + 4} + \sqrt{2x^2 - 7x + 10} = 3x - 3$.

25.13. Решите уравнение $(\sqrt{9 + x} + 3)(\sqrt{10 + x} + 8) = -3x$.

25.14. Решите уравнение:

1) $\dfrac{1 + \cos x + \sin x}{\cos x} = 0$; 2) $\dfrac{\cos x + \cos \frac{3x}{2} - 2}{\sin \frac{x}{8}} = 0$.

25.15. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{\cos 3x - 1} = 0$; 2) $\dfrac{\cos x + \cos 3x + 2}{\sin \frac{x}{2} - 1} = 0$.

25.16. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{4} + x\right) = 2\cos\dfrac{2\pi}{3} - 5\operatorname{ctg} x$; 2) $\operatorname{tg} 2x + \sin 2x = -\dfrac{3}{2}\operatorname{ctg} x$.

25.17. Решите уравнение $\operatorname{tg} 2x - \sin 2x = -\dfrac{9}{2}\operatorname{ctg} x$.

25.18. Решите уравнение $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\dfrac{\sin x}{5}}$.

25.19. Решите уравнение $\log_{\frac{-x^2 - 6x}{10}} (\sin 3x + \sin x) = \log_{\frac{-x^2 - 6x}{10}} \sin 2x$.

25.20. Решите уравнение $\log_9 \sin 2x = \log_3 \sqrt{\sin x}$.

25.21. Решите уравнение $\log_4 \sin 2x = \log_2 \sqrt{-\sin x}$.

25.22. Решите уравнение $\arccos (x\sqrt{3}) = \arcsin (3x - 2)$.

25.23. Решите уравнение $\arcsin x = \arccos (3x - 1)$.

§ 26 Основные методы решения уравнений

В таблице приведены схемы решения некоторых видов уравнений.

Уравнение	Условия, равносильные данному уравнению
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert = g(x)$	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right. \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$

Уравнение	Условия, равносильные данному уравнению
$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)}=g(x)$	$\begin{cases} f(x)=g^2(x), \\ g(x)\geqslant 0 \end{cases}$
$a^{f(x)}=a^{g(x)}$, $a>0$, $a\neq 1$	$f(x)=g(x)$
$\log_a f(x)=\log_a g(x)$, $a>0$, $a\neq 1$	$\begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)>0 \end{cases}$

Часто решение уравнений сводится к решению уравнений, приведённых в таблице. Это иллюстрируют упражнения 26.1, 26.2. К тем уравнениям, которые не сводятся к данным, применяют специальные методы и приёмы. Рассмотрим некоторые из них.

Метод разложения на множители

Хорошо, если удаётся левую часть уравнения $f(x)=0$ представить в виде произведения нескольких выражений. Как правило, этот шаг полезен, поскольку позволяет вместо данного уравнения решить совокупность более простых уравнений.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решите уравнение $x^3-6x^2+11x-6=0$.

Решение. Очевидно, что число 1 является корнем данного уравнения. Тогда левую часть уравнения можно представить в виде произведения $(x-1)\,Q(x)$, где $Q(x)$ — квадратный трёхчлен. Для нахождения $Q(x)$ разделим «уголком» многочлен $x^3-6x^2+11x-6$ на двучлен $x-1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3-6x^2+11x-6 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2-5x+6 \\ -\;-5x^2+11x-6 & \\ \underline{-5x^2+5x} & \\ -\;6x-6 & \\ \underline{6x-6} & \\ 0 & \end{array}$$

Получили, что $Q(x) = x^2 - 5x + 6$.

Имеем: $(x-1)(x^2-5x+6) = 0$.

Это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} x-1=0, \\ x^2-5x+6=0. \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=2, \\ x=3. \end{array}\right.$

Ответ: 1; 2; 3. ■

Пример 2. Решите уравнение $3\sqrt{x-2} \cdot 2^{x^2-3} + 2x = x \cdot 2^{x^2-3} + 6\sqrt{x-2}$.

Решение. Имеем: $3\sqrt{x-2} \cdot 2^{x^2-3} - x \cdot 2^{x^2-3} + 2x - 6\sqrt{x-2} = 0$;

$2^{x^2-3}(3\sqrt{x-2} - x) - 2(3\sqrt{x-2} - x) = 0$; $(3\sqrt{x-2} - x)(2^{x^2-3} - 2) = 0$.

Казалось бы, это уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x-2} - x = 0, \\ 2^{x^2-3} - 2 = 0. \end{array}\right.$ Но это не так, поскольку такой переход не учитывает области определения исходного уравнения. В результате корень –2 второго уравнения совокупности не входит в область определения исходного уравнения. На самом деле исходное уравнение равносильно системе $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x-2} - x = 0, \\ 2^{x^2-3} - 2 = 0, \end{array}\right. \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$

Отсюда $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 3\sqrt{x-2} = x, \\ 2^{x^2-3} = 2, \end{array}\right. \\ x \geqslant 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 9x - 18 = x^2, \\ x^2 - 3 = 1, \end{array}\right. \\ x \geqslant 2; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 6, \\ x = 2, \\ x = -2, \end{array}\right. \\ x \geqslant 2. \end{array}\right.$

Ответ: 2; 3; 6. ■

Метод замены переменной

Пример 3. Решите уравнение $x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 2 = 0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение так:

$$x^4 - 8x^3 + 16x^2 - x^2 + 4x - 2 = 0;$$
$$(x^2 - 4x)^2 - (x^2 - 4x) - 2 = 0.$$

Сделав замену $x^2 - 4x = t$, получаем уравнение $t^2 - t - 2 = 0$. Отсюда $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 4x = 2, \\ x^2 - 4x = -1. \end{array}\right.$

Ответ: $2+\sqrt{6}$; $2-\sqrt{6}$; $2+\sqrt{3}$; $2-\sqrt{3}$. ■

Пример 4. Решите уравнение $(x-1)\,x\,(x+1)(x+2)=24$.

Решение. При решении уравнений такого вида надо найти «выгодный» способ группировки множителей, позволяющий с помощью замены переменной свести исходное уравнение к квадратному. В этом примере он будет таким: $((x-1)(x+2))\,(x\,(x+1))=24$.

Действительно, $(x^2+x-2)(x^2+x)=24$. Выполним замену $x^2+x=t$. Тогда $t\,(t-2)=24$; $t^2-2t-24=0$; $t_1=-4$, $t_2=6$. Получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x=-4, \\ x^2+x=6. \end{array}\right.$$

Решите эту совокупность самостоятельно.

Ответ: -3; 2. ■

Пример 5. Решите уравнение $(x^2-2x+2)^2+3x\,(x^2-2x+2)=10x^2$.

Решение. Выполнив проверку, можно убедиться, что число 0 не является корнем данного уравнения. Тогда уравнение

$$\frac{(x^2-2x+2)^2}{x^2}+\frac{3(x^2-2x+2)}{x}=10,$$

полученное в результате деления обеих частей исходного уравнение на x^2, равносильно исходному. Замена $\dfrac{x^2-2x+2}{x}=t$ приводит к квадратному уравнению $t^2+3t-10=0$.

Завершите решение самостоятельно.

Ответ: -2; -1; $2-\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$. ■

Пример 6. Решите уравнение $\dfrac{8x}{x^2-4x+2}+\dfrac{12x}{x^2+x+2}=-5$.

Решение. Поскольку число 0 не является корнем данного уравнения, то, разделив числитель и знаменатель каждой из дробей левой части уравнения на x, получаем уравнение, равносильное данному:

$$\frac{8}{x-4+\dfrac{2}{x}}+\frac{12}{x+1+\dfrac{2}{x}}=-5.$$

Сделаем замену $x+\dfrac{2}{x}=t$. Тогда $\dfrac{8}{t-4}+\dfrac{12}{t+1}+5=0$; $\dfrac{t^2+t-12}{(t-4)(t+1)}=0$;

$$\begin{cases} t^2+t-12=0, \\ (t-4)(t+1)\neq 0; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Имеем: $\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{2}{x}=-4, \\ x+\dfrac{2}{x}=3; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x^2+4x+2=0, \\ x^2-3x+2=0. \end{array}\right.$

Ответ: $-2-\sqrt{2}$; $-2+\sqrt{2}$; 1; 2. ■

Пример 7. Решите уравнение $\sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^2 x} + 3\left(\sin x - \dfrac{2}{\sin x}\right) - 2 = 0.$

Решение. Пусть $\sin x - \dfrac{2}{\sin x} = t$. Тогда $\sin^2 x - 4 + \dfrac{4}{\sin^2 x} = t^2$. Отсюда $\sin^2 x + \dfrac{4}{\sin^2 x} = t^2 + 4$. Исходное уравнение принимает вид $t^2 + 4 + 3t - 2 = 0$.

Отсюда $t^2 + 3t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = -2. \end{array}\right.$

Получаем, что исходное уравнение равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} \sin x - \dfrac{2}{\sin x} = -1, \\ \sin x - \dfrac{2}{\sin x} = -2. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \sin^2 x + \sin x - 2 = 0, \\ \sin^2 x + 2\sin x - 2 = 0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = -2, \\ \sin x = -1 - \sqrt{3}, \\ \sin x = -1 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$

Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, то получаем: $\left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = \sqrt{3} - 1. \end{array}\right.$

Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{array}\right.$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$; $(-1)^n \arcsin(\sqrt{3} - 1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$. ■

Пример 8. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(4 - x)^2} + \sqrt[3]{(5 + x)^2} - \sqrt[3]{(5 + x)(4 - x)} = 3.$$

Решение. Пусть $\sqrt[3]{4 - x} = a$, $\sqrt[3]{5 + x} = b$. Тогда

$\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ a^3 + b^3 = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 + b^2 - ab = 3, \\ (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = 9; \end{cases}$ $\begin{cases} (a + b)^2 - 3ab = 3, \\ a + b = 3; \end{cases}$

$\begin{cases} ab = 2, \\ a + b = 3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} a = 2, \\ b = 1. \end{cases} \end{array}\right.$ Теперь можно записать: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{4 - x} = 1, \\ \sqrt[3]{5 + x} = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{4 - x} = 2, \\ \sqrt[3]{5 + x} = 1; \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -4. \end{array}\right.$

Ответ: -4; 3. ■

Применение свойств функций

Поиск области определения функции f может быть ключом к решению уравнения $f(x) = 0$.

Пример 9. Решите уравнение

$$(\sqrt{x^2 - 4x + 3} + 1)\log_3 x + \sqrt{4x - x^2 - 3} = 1.$$

Решение. Применение приёмов, связанных с преобразованием левой части данного уравнения, вряд ли приведёт к успеху. Вместе с тем нахождение области определения уравнения — путь вполне естественный.

Имеем: $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ 4x - x^2 - 3 \geqslant 0, \\ x > 0. \end{cases}$

Решив эту систему, получим, что областью определения рассматриваемого уравнения является двухэлементное множество $\{1,\ 3\}$. Проверка показывает, что число 1 не подходит, а число 3 является корнем исходного уравнения.

Ответ: 3. ■

Пусть функции f и g таковы, что для любого $x \in D(f) \cap D(g)$ выполняются неравенства $f(x) \leqslant a$ и $g(x) \geqslant a$, где a — некоторое число. Тогда уравнение $f(x) = g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a. \end{cases}$$

С помощью этих очевидных соображений можно решить целый ряд уравнений.

Пример 10. Решите уравнение $\log_2(5 + 3\cos 4x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Решение. Поскольку $\cos 4x \geqslant -1$, то $5 + 3\cos 4x \geqslant 2$. Отсюда $\log_2(5 + 3\cos 4x) \geqslant 1$.

В то же время $\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$.

Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2(5 + 3\cos 4x) = 1, \\ \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \ k \in \mathbf{Z}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. ■

Вы знаете, что если функция f является возрастающей (убывающей), то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня. Если удаётся корень подобрать, то решение такого уравнения завершено.

Пример 11. Решите уравнение $2x - \sin x = 0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 2x - \sin x$. Имеем: $f'(x) = 2 - \cos x$. Поскольку для любого $x \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, то функция f возрастает на $\mathbf{R}$. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ имеет не более одного корня. Очевидно, что число 0 является корнем данного уравнения.

Ответ: 0. ■

Пример 12. Решите уравнение $\sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1} = 1$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{4x^2 - 1} + \sqrt{4x - 1}$. Легко определить, что $D(f) = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Каждая из функций $g(x) = \sqrt{4x^2 - 1}$ и $h(x) = \sqrt{4x - 1}$ является возрастающей на $D(f)$. Следовательно, функция f также возрастает на $D(f)$.

Очевидно, что число $\frac{1}{2}$ является корнем исходного уравнения. Этот корень единственный.

Ответ: $\frac{1}{2}$. ■

Упражнения

26.1. Решите уравнение:

1) $|x^2 - 7x + 3| = |x - 4|$;
2) $|x^2 - 3x - 1| = x - 1$;
3) $\sqrt{4x^2 - 5x} = \sqrt{3x^2 - 2x - 2}$;
4) $\sqrt{3x + 7} = 7 - x$;
5) $7^{2x + 3} = 7^{3 - x}$;
6) $\log_3(x^2 - 7) = \log_3(-x - 1)$.

26.2. Решите уравнение:

1) $|x^2 - 2x - 5| = |x - 1|$;
2) $|x^2 + 6x - 16| = 8 - 4x$;
3) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$;
4) $2\sqrt{x + 5} = x + 2$;
5) $2^{8 - 2x^2} = 2^{x^2 - 1}$;
6) $\lg(x^2 + 2x - 10) = \lg(3x + 2)$.

26.3. Решите уравнение:

1) $x^3 - 7x - 6 = 0$;
2) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x + 3 = 0$;
3) $x^4 - 9x^2 + 4x + 12 = 0$.

26.4. Решите уравнение:

1) $x^3 + x^2 + x + 6 = 0$;
2) $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4 = 0$.

26.5. Решите уравнение:

1) $(x^2 + 5x)^2 - 2x^2 - 10x - 24 = 0$;
2) $\dfrac{12}{x(x+2)} - \dfrac{12}{(x+1)^2} = 1$.

26.6. Решите уравнение:

1) $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x - 4) = -5$;
2) $\dfrac{x^2 - 3x}{2} - \dfrac{4}{x^2 - 3x} = 1$.

26.7. Решите уравнение:

1) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}-1} = 6$;
2) $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$;
3) $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 8 = 3 \cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

26.8. Решите уравнение:

1) $4^{x^2-x} - 17 \cdot 2^{x^2-x+2} + 256 = 0$;
2) $2^{1-2\sin^2 x} = 3 \cdot 2^{\cos^2 x} - 4$.

26.9. Решите уравнение

$$\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18.$$

26.10. Решите уравнение:

1) $(x + 1)(x - 5)(x + 2)(x + 8) = -360$;
2) $(x^2 + 3x)(x + 5)(x + 8) = 100$.

26.11. Решите уравнение:

1) $x(x + 4)(x + 5)(x + 9) = -36$;
2) $(x^2 + 4x + 3)(x + 5)(x + 7) = -16$.

26.12. Решите уравнение:

1) $(x^2 - 2{,}5x + 1)(x^2 + 3{,}5x + 1) = -5x^2$;
2) $(x + 2)(x + 3)(x^2 + 20x + 96) = 4x^2$.

26.13. Решите уравнение:

1) $(2x + 10)(x + 6)(2x + 20)(x + 12) - 3x^2 = 0$;
2) $(x^2 + 6x - 40)(x + 5)(x - 2) = 18x^2$.

26.14. Решите уравнение:

1) $(2x + 3)^2 + \dfrac{12}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 56$;
2) $12\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{6}\right) = \dfrac{6}{x^2} + \dfrac{x^2}{6} + 4$.

26.15. Решите уравнение:

1) $3x^4 + 5x^3 - 16x^2 + 5x + 3 = 0$;
2) $5\left(x^2 + \dfrac{36}{x^2}\right) = 56\left(x - \dfrac{6}{x}\right)$.

26.16. Решите уравнение $4(x^2 - x + 1)^2 + 5(x + 1)^2 = 12(x^3 + 1)$.

26.17. Решите уравнение $x^4 + 2x^2(x - 1) = 24(x - 1)^2$.

26.18. Решите уравнение:

1) $3\sin^2 x + 2\sin x\cos x = 2$; 2) $5\cos^3 x = \sin x - \cos x$.

26.19. Решите уравнение $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$.

26.20. Решите уравнение $\sin 2x + 3(\sin x + \cos x) + 1 = 0$.

26.21. Решите уравнение $\sin 2x + 4\sin x - 4\cos x - 1 = 0$.

26.22. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x+9} - \sqrt[4]{x-7} = 2$; 2) $\sqrt[3]{x-3} + \sqrt{x+11} = 6$.

26.23. Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{19-x} = 3$; 2) $\sqrt[3]{x-7} + \sqrt{x+1} = 4$.

26.24. Решите уравнение:

1) $2\cos\dfrac{x^2-4x}{3} = x^2 - 8x + 18$; 2) $5\sin x - 12\cos x = x^2 - 2x + 14$.

26.25. Решите уравнение:

1) $\sin\dfrac{\pi x}{6} = x^2 - 6x + 10$; 2) $\sin 2x = x - x^2 - 1$.

26.26. Решите уравнение:

1) $\cos 2x + \cos\dfrac{3x}{4} = 2$; 2) $\sin\dfrac{5x}{2} + \cos 6x = 2$.

26.27. Решите уравнение:

1) $\cos\dfrac{11x}{2}\cos\dfrac{x}{4} = 1$; 2) $\sin 2x - \sin 6x = -2$.

26.28. Решите уравнение $(2x - x^2)\log_3\left(2\sin^2\dfrac{\pi x}{2} + 1\right) = 1$.

26.29. Решите уравнение $4^{-|x+1|}\log_3(2 - 2x - x^2) = 1$.

26.30. Решите уравнение $5^{3-x} = 2^x + 1$.

26.31. Решите уравнение $\log_3(12 - x) = x - 1$.

26.32. Решите уравнение $\cos x - 2x = 1$.

26.33. Решите уравнение $\sin x - \cos x = 2x - 1$.

§ 27 Основные методы решения неравенств

В таблице приведены схемы решения некоторых видов неравенств.

Неравенство	Условия, равносильные данному неравенству
$\lvert f(x)\rvert < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x) \end{cases}$

Неравенство	Условия, равносильные данному неравенству
$\lvert f(x)\rvert > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x) \end{array}\right.$
$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} < g(x)$	$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2, \\ g(x) > 0, \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \end{array}\right.$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a > 1$	$f(x) > g(x)$
$a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $0 < a < 1$	$f(x) < g(x)$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $a > 1$	$\begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $0 < a < 1$	$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Часто решение неравенств сводится к решению неравенств, приведённых в таблице. Это иллюстрируют упражнения 27.1–27.10. К тем неравенствам, которые не сводятся к данным, применяют специальные методы и приёмы. Рассмотрим некоторые из них.

Метод равносильных преобразований

Пример 1. Решите неравенство $(x^2 - 9)\sqrt{x-2} \geqslant 0$.

Решение. Заметим, что ошибочными являются следующие соображения: «Поскольку при $x \geqslant 2$ выполняется неравенство $\sqrt{x-2} \geqslant 0$, то исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} x \geqslant 2, \\ x^2 - 9 \geqslant 0. \end{cases}$ Отсюда $x \in [3; +\infty)$». Несложно увидеть, что при таком «решении» теряется значение $x = 2$.

Правильным решением данного неравенства является, например, переход к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} (x^2 - 9)\sqrt{x - 2} = 0, \\ (x^2 - 9)\sqrt{x - 2} > 0. \end{array}\right.$$

Решением уравнения совокупности являются числа 2 и 3, множеством решений неравенства — промежуток $(3; +\infty)$.

Ответ: $\{2\} \cup [3; +\infty)$. ■

Пример 2. Решите неравенство $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x + 2} > 1$.

Решение. Сразу возводить обе части неравенства в квадрат не является рациональным шагом, поскольку при этом переходе необходимо учитывать такое дополнительное условие: $\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x + 2} \geqslant 0$.

Данное в условии неравенство целесообразно записать так:

$$\sqrt{5x - 1} > 1 + \sqrt{x + 2}.$$

Поскольку обе части последнего неравенства могут принимать только неотрицательные значения, то можно перейти к равносильному неравенству

$$(\sqrt{5x - 1})^2 > (1 + \sqrt{x + 2})^2.$$

Далее получаем:

$$5x - 1 > 1 + 2\sqrt{x + 2} + (x + 2);$$

$$2(x - 1) > \sqrt{x + 2};$$

$$\begin{cases} 4(x - 1)^2 > x + 2, \\ x > 1, \\ x + 2 \geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 - 9x + 2 > 0, \\ x > 1. \end{cases}$$

Отсюда $x > 2$.

Ответ: $(2; +\infty)$. ■

Метод интервалов

Пусть нули функции и её точки разрыва разбивают область определения функции на некоторые промежутки (рис. 27.1). Тогда эти промежутки являются промежутками знакопостоянства функции. Определить знак функции на каждом из таких промежутков можно с помощью «пробных точек».

Эти соображения являются основой для решения широкого класса неравенств.

Пример 3. Решите неравенство $\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1$. Имеем: $D(f) = [1; +\infty)$. Найдём нули функции f. Для этого решим уравнение $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} - 1 = 0$.

Сделаем замену: $\sqrt[3]{2-x} = a$, $\sqrt{x-1} = b$. Имеем: $2 - x = a^3$, $x - 1 = b^2$. Отсюда $a^3 + b^2 = 1$. Получаем систему

$$\begin{cases} a + b - 1 = 0, \\ a^3 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + (1-a)^2 = 1; \end{cases}$ $\begin{cases} b = 1 - a, \\ a^3 + a^2 - 2a = 0. \end{cases}$

Эта система имеет три решения: $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(-2; 3)$.

Теперь можно записать: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 0, \\ \sqrt{x-1} = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = 1, \\ \sqrt{x-1} = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{2-x} = -2, \\ \sqrt{x-1} = 3. \end{cases} \end{array}\right.$ Отсюда $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 1, \\ x = 10. \end{array}\right.$

Поскольку функция f непрерывна, то её нули, т. е. числа 1, 2, 10, разбивают её область определения $D(f) = [1; +\infty)$ на промежутки знакопостоянства: $(1; 2)$, $(2; 10)$, $(10; +\infty)$. Имеем:

$\frac{3}{2} \in (1; 2)$; $f\left(\frac{3}{2}\right) > 0$;

$3 \in (2; 10)$; $f(3) < 0$;

$17 \in (10; +\infty)$; $f(17) > 0$.

Знаки функции на промежутках знакопостоянства показаны на рисунке 27.2.

Ответ: $(1; 2) \cup (10; +\infty)$. ■

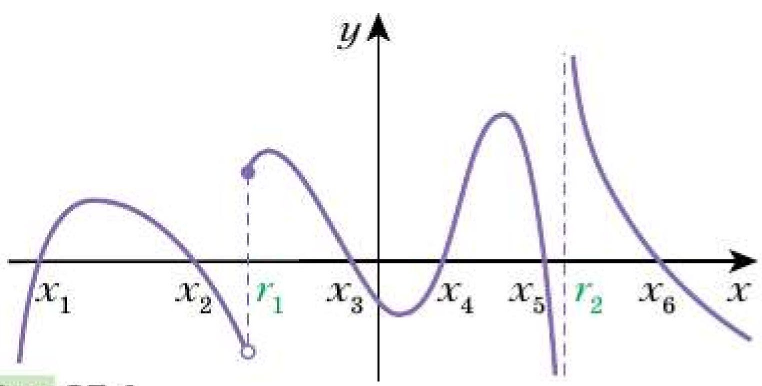


Рис. 27.1

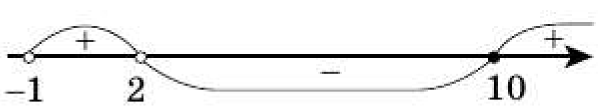


Рис. 27.2

Применение свойств функций

При решении примера 3 было использовано такое свойство функции, как непрерывность. Нередко ключом к решению могут быть и другие свойства функций: периодичность, чётность (нечётность), возрастание (убывание), наибольшее и наименьшее значения функции и т. д.

Например, если $\min\limits_{D(f)} f(x) = a$ и $\max\limits_{D(f)} f(x) = b$, то множеством решений каждого из неравенств $f(x) \geqslant a$ и $f(x) \leqslant b$ является множество $D(f)$ (рис. 27.3).

Ещё один пример: если функция f возрастает на промежутке $D(f) = [a; +\infty)$ и $f(x_0) = 0$, то множеством решений неравенства $f(x) \geqslant 0$ является промежуток $[x_0; +\infty)$ (рис. 27.4).

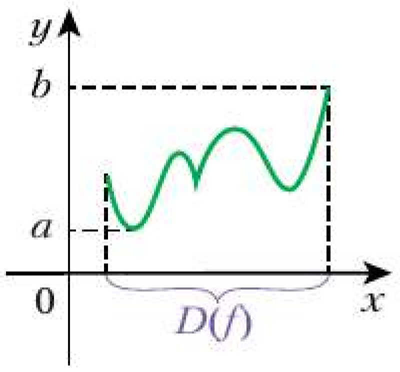


Рис. **27.3**

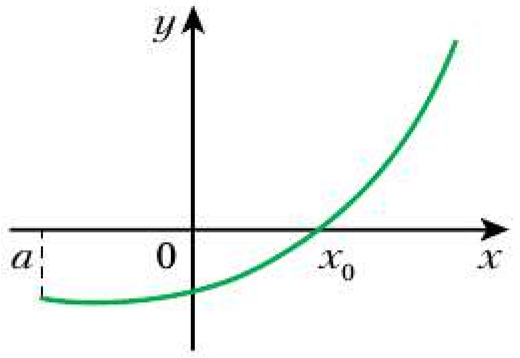


Рис. **27.4**

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие вышесказанное.

Пример 4. Решите неравенство $\sqrt[4]{19 - x} + \sqrt[4]{x + 13} \leqslant 4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[4]{19 - x} + \sqrt[4]{x + 13}$, $D(f) = [-13; 19]$.

Имеем: $f'(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(19 - x)^3}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x + 13)^3}}$. Решив уравнение $f'(x) = 0$, получим $x = 3$.

Сравнивая значения $f(-13)$, $f(3)$, $f(19)$, приходим к выводу, что $\max\limits_{[-13; 19]} f(x) = f(3) = 4$.

Тогда неравенство $f(x) \leqslant 4$ выполняется для всех $x \in D(f)$.

Ответ: $[-13; 19]$. ■

Пример 5. Решите неравенство $\log_2(\sqrt{x - 2} + 4)\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 6$.

Решение. Областью определения данного неравенства является промежуток $[2; +\infty)$.

Поскольку $\sqrt{x - 2} + 4 \geqslant 4$, то $\log_2(\sqrt{x - 2} + 4) \geqslant \log_2 4 = 2$.

При $x \geqslant 2$ получаем, что $x^2 + x + 21 \geqslant 27$. Тогда $\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 3$.
Имеем: $\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \geqslant 2$ и $\log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 3$.
Отсюда для всех $x \in [2; +\infty)$ выполняется неравенство

$$\log_2(\sqrt{x-2} + 4) \log_3(x^2 + x + 21) \geqslant 6.$$

Ответ: $[2; +\infty)$. ■

Пример 6. Решите неравенство $\sqrt{x-1} + \sqrt[3]{5x^3 + 9x + 6} \geqslant 5$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt[3]{5x^3 + 9x + 6} - 5$. Легко показать, что эта функция возрастает на $D(f) = [1; +\infty)$. Очевидно, что $f(2) = 0$. Тогда множеством решений неравенства $f(x) \geqslant 0$ является промежуток $[2; +\infty)$.

Ответ: $[2; +\infty)$. ■

Упражнения

27.1. Решите неравенство:
1) $|2x - 5| \leqslant x$; 2) $|3x - 2| > 2x + 1$.

27.2. Решите неравенство:
1) $|3x - 1| < \frac{x}{2}$; 2) $|3x - 5| > 9x + 1$.

27.3. Решите неравенство:
1) $|x^2 + 3x| < x + 4$; 3) $x^2 - x - 2 < |5x - 3|$;
2) $\left|\frac{x+1}{2x-1}\right| < 1$; 4) $|x^2 + 3x| \geqslant 2 - x^2$.

27.4. Решите неравенство:
1) $|4x^2 - 1| < x + 2$; 2) $\left|\frac{3x+1}{x-5}\right| \geqslant 1$; 3) $|x^2 - 3x| \geqslant x + 5$.

27.5. Решите неравенство:
1) $\sqrt{2x^2 + 5x - 6} > \sqrt{-x-3}$; 3) $\sqrt{2x^2 + 6x + 3} \geqslant \sqrt{-x^2 - 4x}$;
2) $\sqrt{x+2} > \sqrt{8 - x^2}$; 4) $\sqrt{\frac{8-x}{x-10}} \leqslant \sqrt{\frac{2}{2-x}}$.

27.6. Решите неравенство:
1) $\sqrt{x^2 - 7x + 5} \geqslant \sqrt{3x - 4}$; 3) $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geqslant \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$;
2) $\sqrt{x^2 + 5x} < \sqrt{1 - x^2 + 4x}$; 4) $\sqrt{3-x} \geqslant \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.

27.7. Решите неравенство:
1) $\sqrt{x+7} < x$; 3) $\sqrt{5 - |x+1|} \leqslant 2 + x$.
2) $\sqrt{x^2 - 3x - 10} < 8 - x$;

27.8. Решите неравенство:

1) $x+4>2\sqrt{4-x^2}$;
2) $\sqrt{x^2-3x-18}\leqslant 4-x$;
3) $\sqrt{(x-3)(2-x)}<3+2x$.

27.9. Решите неравенство:

1) $\sqrt{2x+4}>x+3$;
2) $\sqrt{2x^2+5x-6}\geqslant 2-x$;
3) $\sqrt{\dfrac{x^3+8}{x}}>x-2$.

27.10. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x^2-2x}>4-x$;
2) $\sqrt{-x^2-8x-12}\geqslant x+4$;
3) $\sqrt{\dfrac{x^3+27}{x}}>x-3$.

27.11. Решите неравенство:

1) $(x+10)\sqrt{x-5}\leqslant 0$;
2) $(x+1)\sqrt{x+4}\sqrt{x+7}\leqslant 0$;
3) $(x+8)\sqrt{x^2-5x+4}\leqslant 0$;
4) $(x^2+3x-10)\sqrt{2x^2+5x+2}\geqslant 0$.

27.12. Решите неравенство:

1) $(x-12)\sqrt{x-3}\leqslant 0$;
2) $(x+2)^2(x-1)^2\sqrt{x-7}\geqslant 0$;
3) $(x+3)\sqrt{x^2+x-2}\leqslant 0$;
4) $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{10-x}\geqslant 0$.

27.13. Решите неравенство:

1) $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1$;
2) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}\leqslant 5$.

27.14. Решите неравенство:

1) $\sqrt{x-2}+\sqrt{2x+5}>3$;
2) $\sqrt{x}+\sqrt{x-5}\leqslant\sqrt{10-x}$.

27.15. Решите неравенство:

1) $\sin^6 x+\cos^6 x<\dfrac{2}{3}$;
2) $2\cos^2 x-\sin x>1$;
3) $\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg} x-2>0$;
4) $2+\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}2x<0$.

27.16. Решите неравенство:

1) $2\sin^2 x-7\sin x+3>0$;
2) $\sin x+\cos 2x>1$;
3) $\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+2<0$.

◆◆◆

27.17. Решите неравенство:

1) $\cos 2x\operatorname{tg} x<0$;
2) $\sin^2 x\cos x+\cos^2 x\sin x<0$;
3) $(\sin x+\cos x)(\sqrt{3}\sin x-\cos x)>0$;
4) $(\operatorname{tg} x-\sqrt{3})\sin x\leqslant 0$.

27.18. Решите неравенство:

1) $\cos x-\sin 2x-\cos 3x<0$;
2) $\operatorname{ctg} x>\operatorname{ctg} 3x$;
3) $(2\cos x-1)\operatorname{ctg} x\geqslant 0$.

27.19. Решите неравенство:

1) $\sqrt[3]{3-x}+\sqrt{x-2} \leqslant 1$;

2) $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}} \geqslant \dfrac{21}{x}$.

27.20. Решите неравенство:

1) $\sqrt[3]{10-x}+\sqrt{x-1} \geqslant 3$;

2) $\dfrac{\sqrt{6+x}+\sqrt{6-x}}{\sqrt{6+x}-\sqrt{6-x}} \leqslant \dfrac{6}{x}$.

27.21. Решите неравенство:

1) $\sqrt[4]{83-x}+\sqrt[4]{79+x} \leqslant 6$;

2) $\sqrt[4]{11-x}+\sqrt[4]{x+5} \geqslant 2$;

3) $3x^5+\sqrt[3]{3x^3+4x+1} < 5$;

4) $(\sqrt{x+2}+1)\log_4(x^2+4x+20) \geqslant 2$;

5) $\log_2(\sqrt{x-1}+2)\log_5(x^2+x+3) \geqslant 1$.

27.22. Решите неравенство:

1) $\sqrt[6]{71-x}+\sqrt[6]{57+x} \leqslant 4$;

2) $\sqrt[6]{33-x}+\sqrt[6]{31+x} \geqslant 2$;

3) $2\sqrt{x-3}+\sqrt[3]{x^3+9x+10} \geqslant 4$;

4) $\log_2(\sqrt{x+3}+2)\log_3(x^2+6x+18) \geqslant 2$.

§ 28 Упражнения для повторения курсов математики, алгебры, алгебры и начал анализа

1. Делимость натуральных чисел. Признаки делимости

28.1. Неполное частное при делении двух двузначных чисел равно 9, а остаток — 8. Чему равно делимое?

28.2. Маша живёт в пятиэтажном доме в квартире № 40. В каждом подъезде на каждом этаже по 3 квартиры в порядке возрастания номеров: первая — слева, вторая — посередине, а третья — справа.
1) Какой номер подъезда, в котором живёт Маша?
2) На каком этаже живёт девушка?
3) Где расположена её квартира: слева, посередине или справа?

28.3. Сколько существует двузначных чисел, кратных числу: 1) 5; 2) 9; 3) 7?

28.4. Может ли быть простым числом сумма четырёх последовательных натуральных чисел?

28.5. В парке посадили каштаны и дубы, причём на каждых 3 дуба приходилось 2 каштана. Сколько всего посадили деревьев в парке, если дубов посадили 24?

28.6. Сократимой или несократимой является дробь:

1) $\frac{7425}{10^5 - 1}$; 2) $\frac{10^{100} + 5}{35}$; 3) $\frac{10^{100} + 5}{36}$?

28.7. Может ли произведение нескольких простых чисел заканчиваться цифрой 0? Цифрой 5?

28.8. Кратна ли сумма:

1) $33^3 + 3$ числу 10; 2) $10^{10} + 5$ числу 3?

28.9. Книги можно расставить поровну на 12 полках или на 8 полках. Сколько имеется книг, если известно, что их больше 100, но меньше 140?

28.10. Яблоки можно разложить поровну в 12 пакетов или, тоже поровну, в 16 пакетов. Сколько имеется яблок, если известно, что их больше 80, но меньше 120?

28.11. В саду растут яблони и вишни, причём яблонь в 3 раза больше, чем вишен. Какому из приведённых чисел может быть равным общее количество деревьев в саду?

1) 18; 2) 20; 3) 21; 4) 25.

28.12. При делении натурального числа n на 6 получили остаток 4. Чему равен остаток при делении числа $2n$ на 6?

28.13. В каждом букете должны быть 3 красные и 4 белые розы. Какое наибольшее количество таких букетов можно составить из 36 красных и 45 белых роз?

28.14. Натуральные числа a и b таковы, что a — чётное число, b — нечётное. Значение какого из данных выражений обязательно является чётным числом:

1) $a^2 + 3$; 2) $b(a + b)$; 3) $\frac{ab}{2}$; 4) $\frac{a^2}{2}$?

28.15. Натуральные числа a и b таковы, что a — чётное, b — нечётное. Значение какого из данных выражений не может быть натуральным числом:

1) $\frac{4b}{3a}$; 2) $\frac{2a}{b}$; 3) $\frac{a^2}{b^2}$; 4) $\frac{b^2}{a}$?

28.16. Сколько натуральных делителей имеет произведение двух различных простых чисел?

28.17. Существует ли такое трёхзначное число $\overline{abc}$, что значение выражения $\overline{abc} - \overline{cba}$ является квадратом натурального числа?

28.18. Существует ли такое трёхзначное число $\overline{abc}$, что значение выражения $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ является квадратом натурального числа?

28.19. Докажите, что при любом целом значении n значение выражения $n(n + 1)(2n + 1)$ кратно 6.

28.20. Докажите, что при любом натуральном значении n значение выражения $\frac{n}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n^3}{6}$ является натуральным числом.

28.21. Сумма пяти натуральных чисел равна 200. Может ли последняя цифра их произведения быть равной 7?

28.22. Существуют ли такие натуральные числа n и k, что значение выражения 5^n+1 кратно значению выражения 5^k-1?

28.23. Существует ли целое число, дающее при делении на 6 остаток 4, а при делении на 9 остаток 5?

28.24. Натуральное число $n>1$ не делится нацело ни на 2, ни на 3. Докажите, что число n^2-1 кратно 24.

28.25. Докажите, что не существует такого натурального числа p, для которого числа $p+5$ и $p+10$ являются простыми.

28.26. Найдите все пары натуральных чисел $(m; n)$ таких, что $m!+12=n^2$.

28.27. Найдите все двузначные натуральные числа, любая натуральная степень которых оканчивается двумя цифрами, образующими это двузначное число.

28.28. Докажите, что при всех натуральных значениях n дробь $\frac{2n^2+5n+3}{3n^2+10n+8}$ несократима.

28.29. Известно, что p и q — нечётные числа. Докажите, что уравнение $x^2+px+q=0$ не имеет рациональных корней.

2. Рациональные числа и действия с ними

28.30. Расстояние между двумя городами легковой автомобиль проезжает за 5 ч, а грузовой — за 8 ч. Какой автомобиль проедет большее расстояние: легковой за 3 ч или грузовой за 5 ч?

28.31. Сколько можно составить неравных между собой правильных дробей, числителями и знаменателями которых являются числа:

1) 3, 5, 7, 11, 13, 17; 2) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

28.32. Сколько существует неправильных дробей с числителем 10?

28.33. Сколько можно составить неравных между собой неправильных дробей, числителями и знаменателями которых являются числа:

1) 7, 11, 13, 15, 17, 19, 23; 2) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12?

28.34. Вычислите значение выражения:

1) $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{9\cdot 10}$;

2) $\frac{3}{2\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\ldots+\frac{3}{26\cdot 29}$.

28.35. Докажите, что:

1) $\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\ldots+\frac{1}{24}>\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{28}+\frac{1}{29}+\frac{1}{30}+\ldots+\frac{1}{36}>\frac{1}{4}$.

28.36. Какую из данных десятичных дробей нельзя преобразовать в конечную десятичную дробь:

1) $\frac{11}{16}$; 2) $\frac{24}{600}$; 3) $\frac{5}{12}$; 4) $\frac{18}{125}$?

28.37. Сумма 1000 натуральных чисел равна 1001. Чему равно их произведение?

28.38. Бассейн можно наполнить водой за 10 ч через одну трубу и опорожнить за 15 ч через другую. Какая часть объёма бассейна останется незаполненной водой через 3 ч после того, как открыли краны на обеих трубах?

28.39. Одна швея может выполнить некоторый заказ за 2 ч, а другая — за 3 ч. Хватит ли им 1 ч, чтобы, работая вместе, выполнить заказ?

28.40. Известно, что $\frac{1}{3}$ одного положительного числа равна $\frac{1}{4}$ другого положительного числа. Какое из этих чисел больше?

28.41. Требуется расфасовать $27\frac{1}{2}$ кг сахара в пакеты по $\frac{3}{4}$ кг каждый. Сколько получится полных пакетов?

28.42. Сколько банок ёмкостью 0,3 л требуется, чтобы разлить в них 4 л мёда?

28.43. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за 6 ч. Один из них, работая самостоятельно, может выполнить эту работу за 10 ч. За сколько часов её может выполнить самостоятельно другой рабочий?

28.44. Одна бригада может выполнить заказ за 8 дней, а другая — за 12 дней. Сначала первая бригада работала 2 дня, а затем её сменила вторая. За сколько дней был выполнен заказ?

3. Множества. Операции над множествами

28.45. Укажите диаграмму Эйлера (рис. 28.1), на которой правильно изображено соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{Z}$.

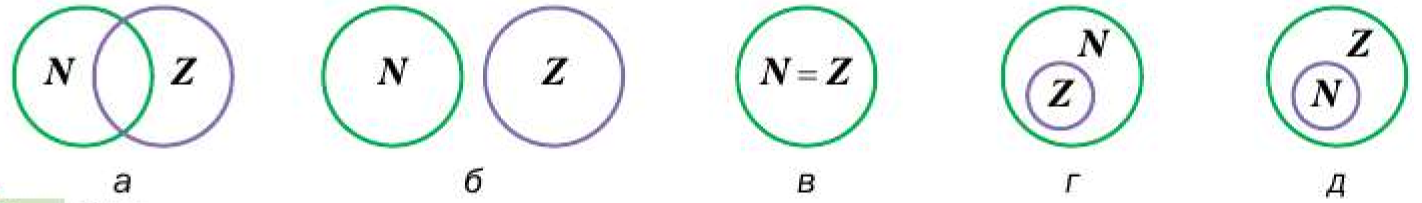


Рис. 28.1

28.46. Какие множества равны:

1) $A = \{x \mid x = 5n - 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$;
2) $B = \{x \mid x = 10n + 9, n \in \boldsymbol{Z}\}$;
3) $C = \{x \mid x = 5n + 4, n \in \boldsymbol{Z}\}$;
4) $D = \{x \mid x = 10n - 1, n \in \boldsymbol{Z}\}$?

28.47. Найдите пересечение множеств A и B, если:

1) A — множество делителей числа 36, B — множество чисел, кратных числу 6;

2) A — множество однозначных чисел, B — множество составных чисел;

3) A — множество чётных чисел, B — множество простых чисел;

4) A — множество однозначных чисел, B — множество чисел, кратных числу 10;

5) A — множество простых чисел, B — множество составных чисел.

28.48. Найдите объединение множеств A и B, если:

1) A — множество цифр числа 6694, B — множество цифр числа 41 686;

2) A — множество делителей числа 15, B — множество делителей числа 20.

28.49. Какое множество является пересечением множеств A и B, если A — множество прямоугольников, B — множество описанных четырёхугольников?

28.50. Какое множество является пересечением множеств A и B, если A — множество ромбов, B — множество вписанных четырёхугольников?

28.51. Какое множество является объединением множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 4n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 4n + 2,\ n \in \mathbb{Z}\}$?

28.52. Какое множество является объединением множеств A и B, если $A = \{x \mid x = 6n,\ n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 6n - 3,\ n \in \mathbb{Z}\}$?

28.53. Вместо знака * запишите знак $\bigcup$ или $\bigcap$ так, чтобы образовалось верное равенство:

1) $A * \varnothing = A$; 2) $A * \varnothing = \varnothing$.

28.54. Известно, что $A \subset B$. Вместо знака * запишите знак $\bigcup$ или $\bigcap$ так, чтобы образовалось верное равенство:

1) $A * B = B$; 2) $A * B = A$.

28.55. Используя диаграммы Эйлера, проиллюстрируйте такие свойства операций над множествами:

1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

28.56. Используя диаграммы Эйлера, проиллюстрируйте такие свойства операций над множествами:

1) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

28.57. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — кружок для юных физиков, а 10 учащихся не посещают эти кружки. Сколько юных физиков увлекаются математикой?

28.58. В классе 30 учащихся. Из них 20 учащихся занимаются в спортивных секциях, а 16 учащихся поют в школьном хоре. Сколько спортсменов поют в хоре?

4. Пропорциональные величины. Процентные расчёты

28.59. На двух книжных полках стояло поровну книг. Потом треть книг с первой полки переставили на вторую. Во сколько раз на второй полке стало больше книг, чем на первой?

28.60. Шесть одинаковых экскаваторов, работая вместе, вырыли котлован за 18 ч. За сколько часов 4 таких экскаватора, работая вместе, выроют два таких котлована?

28.61. Известно, что из 50 кг муки получают 70 кг хлеба. Сколько хлеба получают из 150 кг муки? Сколько требуется муки, чтобы испечь 14 кг хлеба?

28.62. В солнечный день кваса продают на 50 % больше, чем в пасмурный. Во сколько раз в пасмурный день продают меньше кваса, чем в солнечный?

28.63. От верёвки отрезали 50 % её длины, а затем 20 % остатка. Сколько процентов от первоначальной длины верёвки осталось?

28.64. Сплав меди и олова массой 5,5 кг содержит меди на 20 % больше, чем олова. Найдите массу меди в этом сплаве.

28.65. Цену товара сначала увеличили на 50 %, а затем уменьшили на 50 %. Увеличилась или уменьшилась и на сколько процентов первоначальная цена товара?

28.66. Цену товара сначала снизили на 20 %, а затем повысили на 30 %. Как и на сколько процентов изменилась первоначальная цена вследствие этих двух переоценок?

28.67. Вкладчик положил в банк 120 000 р. на два разных счёта. По первому из них банк выплачивает 5 % годовых, а по второму — 7 % годовых. Через год вкладчик получил по 5-процентному вкладу на 2400 р. процентных денег больше, чем по второму. Сколько рублей он положил на каждый счёт?

28.68. Смешали 50-процентный и 20-процентный растворы кислоты и получили 600 г 30-процентного раствора. Сколько граммов каждого раствора смешали?

28.69. Сколько килограммов 30-процентного и сколько килограммов 40-процентного сплавов меди надо взять, чтобы получить 50 кг 36-процентного сплава?

28.70. При сушке грибы теряют 92 % своей массы. Сколько свежих грибов надо взять, чтобы получить 24 кг сушёных?

28.71. К 200 г 10-процентного раствора соли долили 300 г воды. Каково процентное содержание соли в полученном растворе?

28.72. Смешали 72 г 5-процентного и 48 г 15-процентного раствора соли. Найдите процентное содержание соли в полученном растворе.

28.73. Цена товара выросла с 1600 р. до 1640 р. На сколько процентов выросла цена товара?

28.74. Цена товара снизилась с 3200 р. до 2560 р. На сколько процентов снизилась цена товара?

28.75. Вкладчик положил в банк 60 000 р. под 10 % годовых. Сколько денег будет на его счёте через 2 года?

28.76. Предприниматель взял в банке кредит в размере 300 000 р. под некоторый процент годовых. Через два года он вернул в банк 430 200 р. Под какой процент годовых даёт кредиты этот банк?

28.77. В 2013 году в некотором городе было 60 000 жителей, а в 2015 году — 54 150 жителей. На сколько процентов ежегодно уменьшалось население этого города?

28.78. Вкладчик положил в банк 30 000 р. За первый год ему начислили некоторый процент годовых, а во второй год банковский процент был уменьшен на 6 %. На конец второго года на счёте стало 34 320 р. Сколько процентов составляла банковская ставка в первый год?

28.79. К сплаву меди и цинка, который содержал меди на 4 кг больше, чем цинка, добавили 4 кг меди. Вследствие этого процентное содержание меди в сплаве увеличилось на 7,5 %. Сколько килограммов меди содержал сплав вначале?

28.80. Водно-солевой раствор содержал 4 кг соли. Через некоторое время 4 кг воды испарилось, вследствие чего концентрация соли в растворе увеличилась на 5 %. Какой была первоначальная масса раствора?

28.81. Водно-солевой раствор содержал 3 кг соли, концентрация которой была менее 20 %. К этому раствору добавили 6 кг соли, после чего концентрация соли увеличилась на 15 %. Какой была первоначальная масса раствора?

5. Элементы статистики

28.82. Некоторая выборка состоит из 30 чисел, среди которых число 7 встречается 12 раз, число 9 встречается 8 раз и число 15 встречается 10 раз. Найдите среднее значение данной выборки.

28.83. На графике, изображённом на рисунке 28.2, отражены объёмы продажи ручек в магазине канцтоваров в течение 6 месяцев. Сколько в среднем продавали ручек за один месяц?

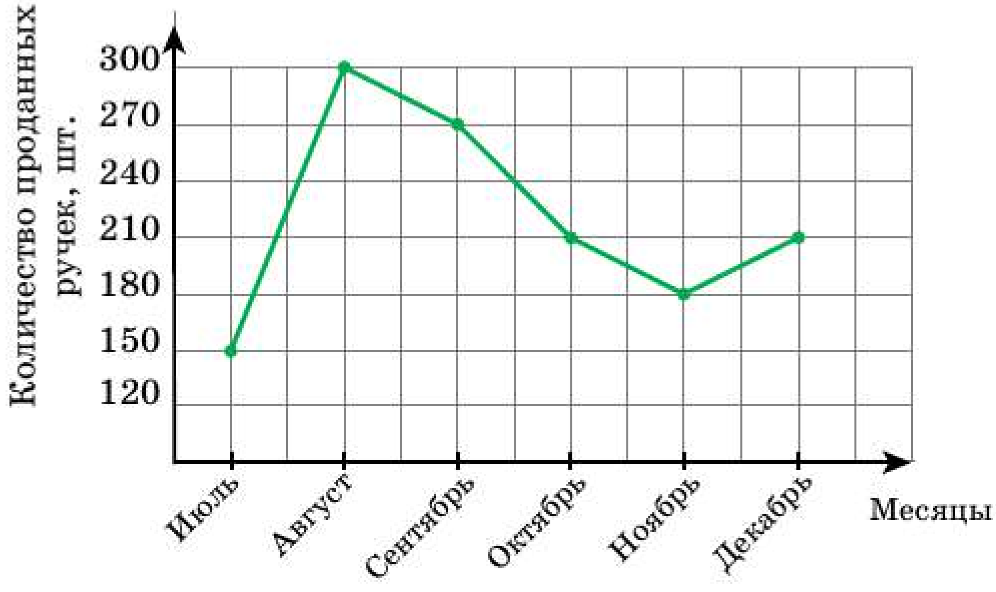


Рис. 28.2

28.84. Среднее значение выборки 7, 10, y, 14 равно 11. Чему равен y?

28.85. Средний рост 10 баскетболистов равен 195 см, а средний рост семи из них — 192 см. Какой средний рост остальных трёх баскетболистов?

28.86. Найдите среднее значение, моду, медиану и размах совокупности данных:

1) 5, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 14, 15, 22;

2) 5, 12, 12, 14, 14, 8, 12.

28.87. На рисунке 28.3 изображена диаграмма, отображающая распределение деревьев, растущих в парке. Какие из данных утверждений верны:

1) дубов в парке больше, чем тополей;

2) тополя составляют менее 50 % всех деревьев;

3) клёнов и ив растёт больше, чем дубов;

4) дубы составляют более 25 % всех деревьев;

5) тополя и ивы составляют менее половины всех деревьев?

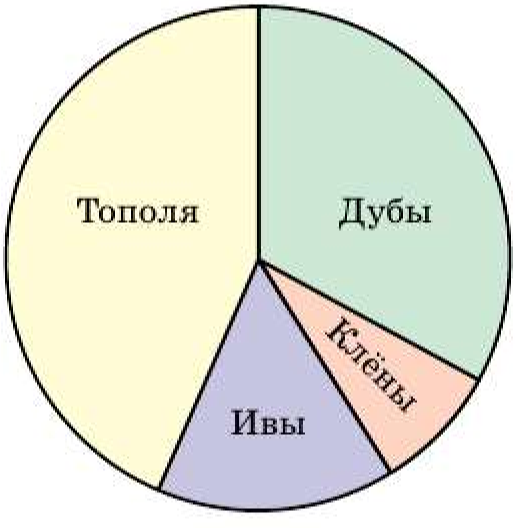


Рис. 28.3

28.88. Среди учащихся 11 класса провели опрос: сколько времени они тратят ежедневно на выполнение домашних заданий. Результаты опроса представили в виде гистограммы, изображённой на рисунке 28.4. Найдите моду и среднее значение данной выборки.

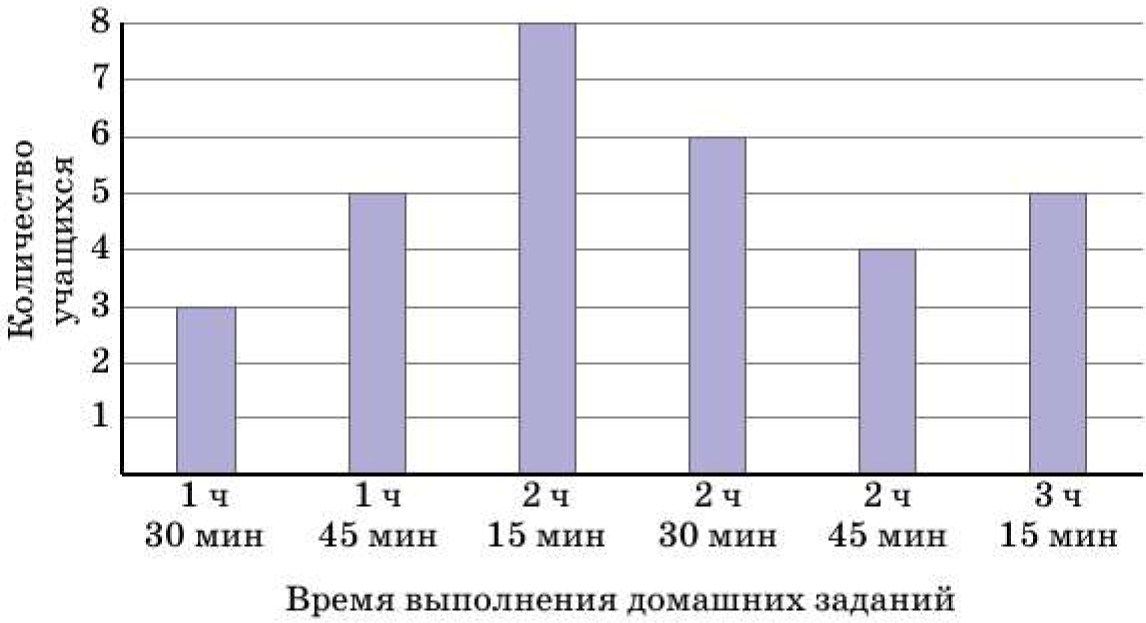


Рис. **28.4**

28.89. Опросив группу мальчиков-девятиклассников об их размере обуви, составили такую таблицу.

Размер обуви	26,5	27	27,5	28	28,5	29	29,5
Количество мальчиков	5	8	7	7	6	5	2

Найдите относительную частоту, соответствующую 28-му размеру обуви.

28.90. По результатам диктанта по русскому языку 25 учащихся 11 класса составили таблицу, в которой отобразили распределение количества ошибок, сделанных одним учащимся.

Количество ошибок	0	1	2	3	4
Количество учащихся	5	4	6	8	2

Найдите моду и среднее значение выборки, постройте соответствующую гистограмму.

28.91. В течение первых десяти дней мая температура воздуха в 6 ч утра была такой: 16°; 14°; 12°; 16°; 15°; 15°; 13°; 15°; 17°; 14°. Найдите меры центральной тенденции полученной совокупности данных. Заполните частотную таблицу.

Температура воздуха	
Частота	
Относительная частота, %	

28.92. Учёт посещаемости школы 24 учащимися 11 класса показал, что в первом полугодии ими было пропущено следующее количество дней: 4, 1, 4, 1, 4, 5, 4, 2, 3, 3, 5, 4, 5, 4, 1, 2, 3, 4, 3, 4, 3, 8, 4, 3.

1) Составьте частотную таблицу.
2) Найдите среднее значение и моду данной выборки.
3) Постройте соответствующую гистограмму.

6. Рациональные выражения

28.93. Докажите, что не существует таких значений x и y, при которых многочлены $5x^2 - 8xy - 3y^2$ и $-4x^2 + 8xy + 5y^2$ одновременно принимали бы отрицательные значения.

28.94. При некоторых значениях a и b выполняются равенства $a + b = 8$, $ab = 3$. Найдите значение выражения $a^2 + b^2$ при этих же значениях a и b.

28.95. При некоторых значениях x_1 и x_2 выполняются равенства $x_1 - x_2 = 7$, $x_1x_2 = 4$. Найдите при этих же значениях x_1 и x_2 значение выражения:

1) $x_1x_2^2 - x_1^2x_2$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 + x_2)^2$; 4) $x_1^3 - x_2^3$.

28.96. При некоторых значениях x и y выполняются равенства $x + y = 6$, $xy = -3$. Найдите при этих же значениях x и y значение выражения:

1) $x^3y^2 + x^2y^3$; 2) $(x - y)^2$; 3) $x^4 + y^4$.

28.97. Найдите все натуральные значения n, при которых является целым числом значение выражения:

1) $\frac{5n^2 + 3n + 10}{n}$; 2) $\frac{n^3 - 6n^2 + 32}{n^2}$; 3) $\frac{12n + 11}{3n - 2}$.

28.98. Сократите дробь:

1) $\frac{3x^2 - 10x + 3}{x^2 - 4x + 3}$; 3) $\frac{a^4 + 9a^2 + 25}{a^2 + a + 5}$;

2) $\frac{9x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{3x^2 - 2x - 1}$; 4) $\frac{x^{71} + x^{70} + \ldots + x + 1}{x^{23} + x^{22} + \ldots + x + 1}$.

28.99. Известно, что $x - \frac{1}{x} = 6$. Найдите значение выражения $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

28.100. Известно, что $3x + \frac{1}{x} = -3$. Найдите значение выражения $9x^2 + \frac{1}{x^2}$.

28.101. Дано: $x^2 + \frac{16}{x^2} = 56$. Найдите значение выражения $x + \frac{4}{x}$.

28.102. Дано: $x^2 + \frac{1}{x^2} = 3$. Найдите значение выражения $x - \frac{1}{x}$.

28.103. Упростите выражение:

1) $\frac{a^2 + ab + 5a + 5b}{a^2 + 2ab + b^2} : \frac{a^2 - 25}{a^2 + ab - 5a - 5b}$;

2) $\frac{a^2 - a + ab - b}{a^2 - a - ab + b} : \frac{a^2 + a + ab + b}{a^2 + a - ab - b}$.

28.104. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{2x}{1 - 3y} + \frac{2x}{3y + 1}\right) : \frac{4x^2 + 14x}{9y^2 + 1 - 6y}$;

2) $\frac{x^3 - y^3}{2y}\left(\frac{2y}{4 - 2y - 2x + xy} + \frac{2xy + 4y}{(x - y)(x^2 - 4)}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a + b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right) : \frac{(a + b)^2}{ab}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b + c}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b + c}}\left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$.

28.105. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{x^2}{x - y} - y\right) \cdot \left(x + \frac{y^2}{x + y}\right)^{-1}$;

2) $\left(\frac{a}{8} + \frac{1}{6a} + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{a + 2}{12a}\right)^{-1} \cdot (3a + 2)^{-1}$;

3) $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right)^{-1}\left(\left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{x}{x - y}\right)^{-2}$;

4) $\left(\frac{x + 9}{x + 7}\right)^{-1} + \left(\frac{x + 7}{x^2 + 81 - 18x} + \frac{x + 5}{x^2 - 81}\right)\left(\frac{x + 3}{x - 9}\right)^{-2}$.

28.106. Упростите выражение

$$\frac{1}{x(x + 4)} + \frac{1}{(x + 4)(x + 8)} + \frac{1}{(x + 8)(x + 12)} + \frac{1}{(x + 12)(x + 16)}.$$

28.107. Найдите область определения выражения:

1) $\dfrac{1}{x-\dfrac{2}{x-1}}$; 2) $\dfrac{x+1}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x+1}}$.

28.108. Упростите выражение:

1) $x^2y^2\left(\dfrac{1}{(x+y)^2}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\right)+\dfrac{2}{(x+y)^3}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right)$;

2) $\dfrac{a^2-1}{b^2+b}\left(1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{b}}\right)\cdot\dfrac{1+b-b^3-b^4}{1-a^2}$.

28.109. Докажите тождество:

1) $\left(a^2-b^2-\dfrac{4a^2b-4ab^2}{a+b}\right)\left(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}-\dfrac{2ab}{a^2-b^2}\right)^{-1}=(a-b)^2$;

2) $\dfrac{3xyz}{xy+yz+zx}+\dfrac{\dfrac{1-x}{x}+\dfrac{1-y}{y}+\dfrac{1-z}{z}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}}=1$.

28.110. Упростите выражение:

1) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$;

2) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}$.

28.111. Упростите выражение

$$\frac{bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{ca}{(b+c)(b+a)}+\frac{ab}{(c+a)(c+b)}+\frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

28.112. Докажите тождество

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

28.113. Упростите выражение $\dfrac{1}{1-b}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{2}{1+b^2}+\dfrac{4}{1+b^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+b^{2^n}}$.

28.114. Известно, что $a^2-a-1=0$. Докажите, что

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)\left(a^4+\frac{1}{a^4}\right)\ldots\left(a^{2^{n-1}}+\frac{1}{a^{2^{n-1}}}\right)=a^{2^n}-\frac{1}{a^{2^n}}.$$

28.115. Докажите, что если $a+b+c=1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, то $a^2+b^2+c^2=1$.

28.116. Докажите, что если $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ и $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}=0$, то $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

28.117. Разложите на множители выражение
$$x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y).$$
28.118. Разложите на множители выражение
$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2).$$
28.119. Попарно разные числа a, b и c таковы, что $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Докажите, что $|abc|=1$.

7. Рациональные уравнения. Системы алгебраических уравнений

28.120. Решите уравнение:

1) $\frac{5}{x^2-4x+4}-\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x+2}=0;$

2) $1+\frac{2x}{x+4}+\frac{27}{2x^2+7x-4}=\frac{6}{2x-1};$

3) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4;$

4) $\frac{x^2+4x+4}{x+4}-\frac{2x+6}{x+2}=\frac{x^2+x+1}{x+1}-\frac{2x+9}{x+3};$

5) $\frac{3x}{x^3-1}-\frac{5}{4x^2+4x+4}=\frac{1}{2(1-x)};$

6) $\frac{x}{2x^2+12x+10}+\frac{3x+1}{4x^2+16x-20}-\frac{x+34}{x^3+5x^2-x-5}=0;$

7) $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=\frac{x-7}{x-1}+4;$

8) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$

28.121. Решите уравнение:

1) $(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55;$

2) $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0;$

3) $(x-2)^4+(x+2)^4=82;$

4) $x^2+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x}-x=4;$

5) $\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+\frac{x+1}{x-4}=12\cdot\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2;$

6) $\frac{4x}{x^2+x+3}+\frac{5x}{x^2-5x+3}=-\frac{3}{2};$

7) $x^2+\frac{25x^2}{(x+5)^2}=11.$

28.122. Решите уравнение:

1) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$;

2) $5(x^2 + 2x)^2 - 11(x^2 + 2x)(x^2 + x + 1) + 6(x^2 + x + 1)^2 = 0$;

3) $x(x + 3)(x + 5)(x + 8) + 36 = 0$;

4) $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1)$;

5) $x^2 + \dfrac{9x^2}{(x + 3)^2} = 16$.

28.123. Решите уравнение:

1) $|x + 2| + |x - 3| = 5$;

2) $|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$;

3) $\dfrac{|x - 3|}{|x - 2| - 1} = 1$;

4) $||3 - x| - x + 1| + x = 6$.

28.124. Для каждого значение a решите уравнение:

1) $\dfrac{x - 4}{x - a} = 0$;

2) $\dfrac{x - a}{x + 3} = 0$;

3) $\dfrac{(a - 4)(x - a)}{x - 3} = 0$;

4) $\dfrac{(x - a)(x + 5)}{x - 8} = 0$;

5) $\dfrac{(x + 4)(x - 2)}{x - a} = 0$;

6) $\dfrac{x - a}{(x + 4)(x - 2)} = 0$.

28.125. При каких значениях a уравнение $\dfrac{x + a}{x^2 - 1} = 0$ не имеет корней?

28.126. При каких значениях a уравнение $\dfrac{(x - a)(x - 4a)}{x + 12} = 0$ имеет единственный корень?

28.127. Решите уравнение:

1) $\dfrac{4}{x - 3} - \dfrac{a}{2} = 2$;

2) $\dfrac{2x}{2x + a} - \dfrac{a - 2}{2x - a} - \dfrac{4a - 2a^2}{4x^2 - a^2} = 0$;

3) $\dfrac{6}{x^2 - 16} - \dfrac{1}{x - 4} = \dfrac{3a}{4 + x}$.

28.128. При каком значении b имеет один корень уравнение:

1) $2x^2 + 8x - b = 0$; 2) $5x^2 - bx + 20 = 0$?

28.129. Докажите, что при любом значении p имеет два корня уравнение:

1) $2x^2 - px - 1 = 0$; 2) $x^2 + px + p - 3 = 0$.

28.130. При каком значении b имеет один корень уравнение:

1) $bx^2 + x + 1 = 0$; 2) $(b + 1)x^2 + (b - 1)x - 2 = 0$?

28.131. Число 7 является корнем уравнения $x^2 + px - 28 = 0$. Найдите значение p и второй корень уравнения.

28.132. Число $\dfrac{1}{3}$ является корнем уравнения $3x^2 - bx + 2 = 0$. Найдите значение b и второй корень уравнения.

28.133. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $5x^2 + 2x - 11 = 0$. Не решая это уравнение, найдите значение выражения $3x_1x_2 - x_1 - x_2$.

28.134. При каком значении b корни уравнения $x^2 + bx - 7 = 0$ являются противоположными числами? Найдите эти корни.

28.135. Один из корней уравнения $x^2 - 8x + c = 0$ на 6 меньше другого. Найдите значение c и корни уравнения.

28.136. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 5x + m = 0$ удовлетворяют условию $2x_1 - 3x_2 = 20$. Найдите корни уравнения и значение m.

28.137. Известно, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 8x + 5 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2 + x_2^2$; 3) $(x_1 - x_2)^2$; 4) $x_1^3 + x_2^3$.

28.138. Составьте квадратное уравнение, корни которого на 2 больше соответствующих корней уравнения $x^2 + 7x - 4 = 0$.

28.139. Составьте квадратное уравнение, корни которого в 3 раза меньше соответствующих корней уравнения $2x^2 - 8x + 3 = 0$.

28.140. При каких значениях a система уравнений:

1) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 4x + 7y = a \end{cases}$ не имеет решений;

2) $\begin{cases} 5x + ay = 6, \\ 20x - 16y = 24 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений;

3) $\begin{cases} ax + 2y = 8, \\ 7x - 4y = -18 \end{cases}$ имеет единственное решение?

28.141. Решите систему уравнений, используя теорему, обратную теореме Виета:

1) $\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^5 y = 32, \\ x^5 + y = 33. \end{cases}$

28.142. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 64, \\ x - y = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 18, \\ 3x^2 - 2y^2 = 12; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 = 9, \\ 2x^2 + 2xy - y^2 = 11; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} xy - y = -12, \\ 5x - xy = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy = -6, \\ y^2 - xy = 22; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8, \\ xy = 2. \end{cases}$

28.143. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 3x + 2y - 2 = 0, \\ x^2 - xy + y^2 - x - y = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x^2 - 3y^2 + 10x - 12y = 17, \\ 2x^2 + y^2 + 4x + 4y = -2. \end{cases}$

28.144. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y + xy = 4, \\ xy(x + y) = -21; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x} = \dfrac{15}{4}, \\ 2x - 3y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{3x + y}{x - y} - \dfrac{3(x - y)}{3x + y} = -2, \\ x^2 + xy - y^2 = -20. \end{cases}$

28.145. Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}(x^2 - 2y^2) = 4, \\ \dfrac{y}{x}(x^2 + 2y^2) = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x + y) = 23, \\ x^2 + y^2 + xy = 19; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2 + y^2} + 2xy = \dfrac{21}{5}, \\ \dfrac{1}{2xy} + x^2 + y^2 = \dfrac{21}{4}. \end{cases}$

28.146. Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x - 3)^2, \\ xy = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y + x = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y = 1, \\ x^2 + y = 4x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8, \\ xy = 2. \end{cases}$

28.147. При каких значениях a система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = a: \end{cases}$

1) имеет единственное решение;
2) имеет два решения;
3) не имеет решений?

28.148. Сколько решений в зависимости от значения a имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |x| = 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a + |x|; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ xy = 8? \end{cases}$

8. Числовые неравенства и их свойства. Линейные и квадратичные неравенства и их системы. Метод интервалов

28.149. Докажите, что:

1) $x^2 + 4y^2 + 6x + 4y + 10 \geqslant 0$ при всех действительных значениях x и y;

2) $x^2 + 10xy + 26y^2 - 12y + 40 > 0$ при всех действительных значениях x и y;

3) $ab(a + b) < a^3 + b^3$, если $a < 0$, $b < 0$;

4) $m^3 + 2m^2 - 4m - 8 > 0$, если $m > 2$;

5) $\dfrac{a^2 + 5}{\sqrt{a^2 + 4}} > 2$ при всех действительных значениях a.

28.150. Докажите, что если $m > 0$, $x > 0$, $y > 0$, то $mx + \dfrac{y}{4m} \geqslant \sqrt{xy}$.

28.151. Известно, что $xy = 1$, $x > 0$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите неравенство $ax + by \geqslant 2\sqrt{ab}$.

28.152. Докажите неравенство $(1 + a + a^2 + a^3)^2 \leqslant 4(1 + a^2 + a^4 + a^6)$.

28.153. Дано: $2 < x < 6$ и $3 < y < 4$. Оцените значение выражения:

1) $x + y$; 3) xy; 5) $5x + 2y$;

2) $x - y$; 4) $\dfrac{x}{y}$; 6) $3x - 4y$.

28.154. Оцените длину средней линии трапеции с основаниями x см и y см, если $8 < x < 12$, $7 < y < 14$.

28.155. Оцените периметр и площадь квадрата со стороной x см, если $10 < x < 13$.

28.156. Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1) $56 - x^2 - x > 0$; 2) $2x^2 - x - 15 < 0$.

28.157. Найдите наибольшее целое решение неравенства:

1) $1{,}5x^2 + 2x - 2 < 0$; 2) $-2x^2 - 17x - 30 \geqslant 0$.

28.158. При каких значениях a не имеет корней уравнение:

1) $x^2 - ax + 9 = 0$; 2) $x^2 + (a + 2)x + 25 = 0$?

28.159. При каких значениях b имеет два различных действительных корня уравнение:

1) $x^2 - 6bx + 8b + 1 = 0$; 2) $2x^2 + 2(b - 4)x + b = 0$?

28.160. Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 6x^2 - 13x + 5 \geqslant 0, \\ 8 - 2x > 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 6x - 27 < 0, \\ 2x - x^2 \leqslant 0. \end{cases}$

28.161. Найдите множество решений неравенства:

1) $x^2 - 7|x| - 30 < 0$; 2) $6x^2 + 5|x| - 1 \geqslant 0$.

28.162. Решите неравенство:

1) $(x + 8{,}6)(3 - x)(4 - x) \geqslant 0$; 3) $\dfrac{(x + 9)(x + 2)}{x - 9} \geqslant 0$;

2) $(6 + x)(x + 1)(2 - x) < 0$; 4) $\dfrac{6 - x}{x - 4} \geqslant 0$.

28.163. Найдите множество решений неравенства:

1) $(x^2+6x)(x^2-16) \leqslant 0$;

2) $(x^2-6x+5)(x^2+3x) > 0$;

3) $\dfrac{x^2-10x+9}{x^2+4x+3} > 0$;

4) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-81} \leqslant 0$.

28.164. Решите неравенство:

1) $(x-4)^2(x^2-8x+12) < 0$;

2) $(x+2)^2(x^2+x-20) \geqslant 0$;

3) $(x+5)^2(x^2+2x-3) > 0$;

4) $(x-2)^2(x-3)^4(x-4)^3 \geqslant 0$;

5) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2+4x+4} < 0$;

6) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x-10} \geqslant 0$.

28.165. Решите неравенство:

1) $\dfrac{1}{x+3} < \dfrac{2}{x-4}$;

2) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x-1}{x+1} < 2$;

3) $\dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x+2} \geqslant \dfrac{3}{x}$;

4) $\dfrac{7}{x^2-9} - \dfrac{12}{x^2-4} \geqslant 0$.

28.166. Решите неравенство:

1) $\dfrac{(x+1)(x-2)^4(x+3)}{(x-7)(1-3x)} > 0$;

2) $\dfrac{x^3+x^2+3x+3}{x^2-6x+7} \leqslant 0$;

3) $\dfrac{|x|(x-2)^3}{|x+3|(x-4)} \geqslant 0$;

4) $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3) \geqslant 5$;

5) $(x^2+3x)(2x+3) - 16 \cdot \dfrac{2x+3}{x^2+3x} \geqslant 0$;

6) $\dfrac{3x+|x-1|}{x-2} > 1$;

7) $\dfrac{(1+x)(2+x)}{x^2-|x|-2} \geqslant -3x$;

8) $|x^2-3x| + x - 2 < 0$;

9) $|x^2+3x| \geqslant 2 - x^2$.

28.167. Решите неравенство:

1) $\dfrac{x^3+2x^2+5x+10}{x^2-x-6} \leqslant 0$;

2) $(x^2-x-1)(x^2-x-7) < -5$;

3) $(x^2-2x)(2x-2) - 9 \cdot \dfrac{2x-2}{x^2-2x} \leqslant 0$;

4) $\dfrac{2x+|x+1|}{x-2} > 1$;

5) $\dfrac{4}{|x+3|-1} \geqslant |x+2|$;

6) $\dfrac{(1-x)(2-x)}{x^2+|x|-2} \geqslant -2x$;

7) $|x^2-2x-3| < 3x-3$;

8) $|x^2+4x+3| > x+3$.

28.168. При каких значениях параметра a уравнение $(a+4)x^2+(a+4)x+3=0$ имеет корни?

28.169. При каких значениях параметра a неравенство $(a+4)x^2-2ax+2a-6<0$ выполняется при всех значениях x?

28.170. При каких значениях параметра a неравенство $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 2 > 0$ выполняется для любого значения x?

28.171. При каких значениях параметра a неравенство $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ выполняется при всех значениях x?

28.172. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $3ax^2 - 2x - 3a - 2 = 0$ больше 1, а другой меньше 1?

28.173. При каких значениях параметра a корни x_1 и x_2 уравнения $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a + 1) = 0$ удовлетворяют условию $x_1 < a < x_2$?

28.174. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - a = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 6]$?

28.175. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2 - 4x + 4a > 0$ выполняется для всех положительных значений x?

28.176. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + ax - 7a < 0$ выполняется для всех x из промежутка $(1; 2)$?

28.177. При каких значениях параметра a все решения неравенства $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) < 0$ удовлетворяют неравенству $x^2 \leqslant 9$?

28.178. При каких значениях параметра a неравенство $\left|\dfrac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}\right| < 3$ выполняется для любого значения x?

28.179. Найдите все значения параметра q такие, что для любого значения параметра p уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет решение.

9. Степени и корни

28.180. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-12)^2}$, если $a \geqslant 12$;

2) $\sqrt{(y+3)^2}$, если $y \leqslant -3$;

3) $(3-a)\sqrt{\dfrac{36}{(a-3)^2}}$, если $a > 3$;

4) $\sqrt[8]{(b-1)^8}$, если $b \geqslant 1$;

5) $\sqrt[12]{(7-y)^{12}}$, если $y \leqslant 7$;

6) $(5-b)\sqrt[6]{\dfrac{64}{(b-5)^6}}$, если $b > 5$.

28.181. Упростите выражение:

1) $\sqrt[4]{(\sqrt{5}-6)^4}$;

2) $\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{23}-7)^2} - \sqrt{(\sqrt{23}-3)^2}$;

4) $\sqrt[6]{(5-4\sqrt{2})^6} + \sqrt[5]{(5-4\sqrt{2})^5}$.

28.182. Постройте график функции:

1) $y = \sqrt{x^2} + x - 1$, если $x \leqslant 0$;

2) $y = \sqrt{x^2} + 2$;

3) $y = (\sqrt[4]{x+1})^4$;

4) $y = \sqrt[4]{(x+1)^4}$.

28.183. Вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{18a^8}$;

2) $\sqrt[4]{x^9}$;

3) $\sqrt[3]{-m^{10}}$;

4) $\sqrt[6]{a^{10}b^9}$, если $a \leqslant 0$;

5) $\sqrt[4]{-81a^{11}}$;

6) $\sqrt[10]{-p^{31}q^{24}}$.

28.184. Упростите выражение (переменные принимают неотрицательные значения):

1) $\sqrt[4]{b\sqrt[5]{b^4}}$; 2) $\sqrt[3]{c\sqrt[7]{c^2}}$; 3) $\sqrt[6]{a^2\sqrt[5]{a^2}}$.

28.185. Найдите значение выражения:

1) $\left(\dfrac{7^{-\frac{1}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}}{35^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{-\frac{4}{3}}}\right)^{-1,5}$; 2) $\left(\dfrac{25^{\frac{4}{3}}\cdot 216^{\frac{1}{9}}}{5^{-\frac{1}{3}}\cdot 36^{\frac{2}{3}}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{150^{-\frac{5}{4}}}{6^{\frac{1}{4}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

28.186. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{3}{12+5\sqrt{6}}+\dfrac{3}{12-5\sqrt{6}}$; 3) $\sqrt[3]{5-\sqrt{15}}\cdot\sqrt[6]{40+10\sqrt{15}}$;

2) $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2$; 4) $\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

28.187. Упростите выражение:

1) $\dfrac{\sqrt{a}-5}{\sqrt{a}-1}-\dfrac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}$; 3) $\left(\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{8\sqrt{x}}{x-4}\right)\cdot\dfrac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$;

2) $\dfrac{\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{ab}}-\dfrac{\sqrt{b}-1}{\sqrt{ab}+b}$; 4) $\dfrac{a-49}{\sqrt{a}+2}\cdot\dfrac{1}{a+7\sqrt{a}}-\dfrac{\sqrt{a}+7}{a-2\sqrt{a}}$.

28.188. Сократите дробь:

1) $\dfrac{x-8x^{\frac{3}{7}}}{x^{\frac{4}{7}}-8}$; 4) $\dfrac{m^{1,5}-n^{1,5}}{m+m^{0,5}n^{0,5}+n}$; 7) $\dfrac{x^{\frac{5}{8}}+6x^{\frac{1}{4}}}{x-36x^{\frac{1}{4}}}$;

2) $\dfrac{5y^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{2}{3}}}$; 5) $\dfrac{a-2a^{0,5}b^{0,5}+b}{ab^{0,5}-a^{0,5}b}$; 8) $\dfrac{26^{\frac{1}{5}}+2^{\frac{1}{5}}}{52^{\frac{1}{5}}+4^{\frac{1}{5}}}$.

3) $\dfrac{a^{0,5}+b^{0,5}}{a-b}$; 6) $\dfrac{8a+1}{4a^{\frac{2}{3}}-1}$;

28.189. Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{12}{5-\sqrt{13}}+\dfrac{4}{\sqrt{17}+\sqrt{13}}-\dfrac{1}{\sqrt{17}-4}$;

3) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{13}+3}+\ldots+\dfrac{1}{5+\sqrt{21}}$.

28.190. Упростите выражение:

1) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{a^2}$, если $0\leqslant a\leqslant 1$;

2) $\sqrt{(a+1)^2}-\sqrt{a^2}$, если $a<-1$.

28.191. Известно, что $\sqrt{6+a}+\sqrt{7-a}=5$. Найдите значение выражения $\sqrt{(6+a)(7-a)}$.

28.192. Известно, что $\sqrt{24-a}-\sqrt{10-a}=2$. Найдите значение выражения $\sqrt{24-a}+\sqrt{10-a}$.

28.193. Упростите выражение:

1) $\sqrt{a-2+2\sqrt{a-3}}$;

2) $\sqrt{2x-2\sqrt{x^2-4}}$, если $x>2$;

3) $\sqrt{2a-4+2\sqrt{a^2-4a+3}}-\sqrt{a-1}$;

4) $\dfrac{\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}-1}{\sqrt{x+2}}$.

28.194. Упростите выражение:

1) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

2) $a:\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)+b:\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)$;

3) $\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{x}}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2$;

4) $\dfrac{\dfrac{x+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x+y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\dfrac{y-\sqrt{xy}+x}{2\sqrt{xy}}$.

28.195. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot(\sqrt{6}+11)$.

28.196. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}+3}}-\dfrac{\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}-3}$.

28.197. Найдите значение выражения $\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-6\sqrt{20}}}}$.

28.198. Найдите значение выражения $\sqrt{6+2\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

28.199. Докажите, что $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}=2$.

28.200. Докажите, что $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})=8$.

28.201. Докажите, что $\dfrac{\sqrt{21+8\sqrt{5}}}{4+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2.$

28.202. Найдите значение выражения $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}.$

28.203. Упростите выражение

$$\left(\sqrt{a^3-2a^2+a}+\frac{4a\sqrt{a}}{\sqrt{(1-a)^2}}\right):\left(\frac{\sqrt{a^3}}{a-1}-\left(\frac{1-a}{\sqrt{a}}\right)^{-1}\right).$$

28.204. Упростите выражение $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\dfrac{x^2-1}{2}+1.$

28.205. Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^{-2}-1}-\frac{1}{x}\right),\text{ если } 0<x<1.$$

28.206. Упростите выражение $\left(\dfrac{(\sqrt{a^3}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}\right)^2+\sqrt{(a^2+2)^2-8a^2}.$

28.207. Упростите выражение $\dfrac{\dfrac{\sqrt{b^2-2b+1}}{b}+b\sqrt{b^2-2b+1}+2-\dfrac{2}{b}}{\sqrt{b-2+\dfrac{1}{b}}}$, если $0<b<1$.

28.208. Упростите выражение

$$\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{b-\sqrt{ab}}+\frac{a}{\sqrt{ab}+a}\right)-\frac{\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}}{2}.$$

28.209. Упростите выражение $\dfrac{1+(a+\sqrt{a^2-1})^2(b+\sqrt{b^2-1})^2}{(a+\sqrt{a^2-1})(b+\sqrt{b^2-1})}.$

28.210. Упростите выражение $\dfrac{b^2-3b-(b-1)\sqrt{b^2-4}+2}{b^2+3b-(b+1)\sqrt{b^2-4}+2}\sqrt{\dfrac{b+2}{b-2}}$ при $b>2$.

28.211. Упростите выражение $\sqrt{\dfrac{a-2\sqrt{a-1}}{a+2\sqrt{a-1}}}+\sqrt{\dfrac{a+2\sqrt{a-1}}{a-2\sqrt{a-1}}}-\dfrac{4}{\sqrt{a^2-4a+4}}.$

28.212. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}}{\sqrt{1-\dfrac{8}{x}+\dfrac{16}{x^2}}}.$

28.213. На рисунке 28.5 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 3]$. Какому из данных промежутков принадлежит корень уравнения $\sqrt{f(x)} = 2$:

1) $[2; 3]$;
2) $[0; 2]$;
3) $[-2; 0]$;
4) $[-4; -2]$;
5) $[-5; -4]$?

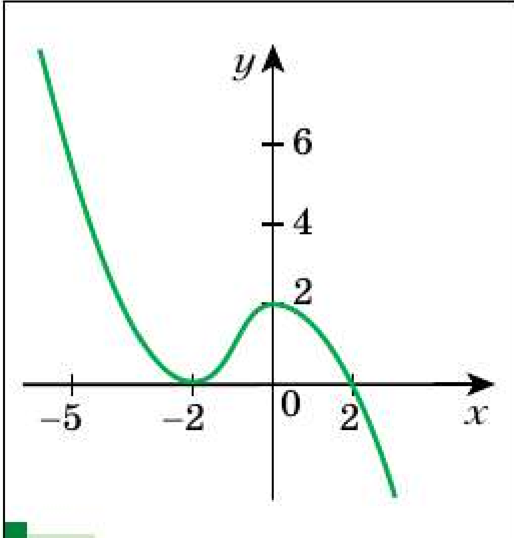


Рис. 28.5

28.214. Сколько корней имеет уравнение:

1) $\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x-3} = 0$;

2) $(x-5)\sqrt{x-4} \cdot \sqrt{(x+2)(x+1)} = 0$;

3) $\sqrt{x-4} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \sqrt[4]{6-x} = 0$?

28.215. Найдите произведение корней уравнения

$$(x^2 - 7x + 10) \cdot |3 - x| \cdot \sqrt{4-x} = 0.$$

28.216. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 + x - 2} = 0$;

2) $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x-2} = 0$;

3) $(x^2 + 3x - 4)(\sqrt{x} - 2) = 0$.

28.217. Решите уравнение $\sqrt[4]{x-4} + 2\sqrt{4-x} = x^2 - 5x + 4$.

28.218. Решите уравнение:

1) $\sqrt{3x-2} = \sqrt{4x+3}$;

2) $\sqrt{3x-3} = \sqrt{4x^2 - 6x - 1}$;

3) $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} = 2$;

4) $\sqrt{x+7} = x+5$;

5) $\sqrt{x^2 + 2x - 12} = \sqrt{3x}$;

6) $\sqrt{x^2 + x - 4} = \sqrt{-2x}$;

7) $\sqrt{x+5} - \sqrt{8-x} = 1$;

8) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x-1} = 1$;

9) $\sqrt{3x-6} + \sqrt{x-4} = 4$;

10) $2\sqrt{x-3} - \sqrt{x+2} = 1$.

28.219. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{3-x} + \sqrt{x+2} = 3$.

28.220. Решите уравнение:

1) $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0$;

2) $2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 3 = 0$;

3) $\sqrt[3]{4 - 4x + x^2} - \sqrt[3]{2-x} - 2 = 0$;

4) $x^2 - 16x - \sqrt{x^2 - 16x + 8} = 12$;

5) $\sqrt{\dfrac{3x}{x-1}} - 2\sqrt{\dfrac{x-1}{3x}} = 1$;

6) $\sqrt{3x^2 - 6x + 7} = 7 + 2x - x^2$.

28.221. Найдите целые корни уравнения $\sqrt{2-x} + \sqrt[6]{x+3} = 3$.

28.222. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $(a-1)\sqrt{x-3}=0$;
2) $(x^2-4x+3)\sqrt{x-a}=0$;
3) $(x^2+4x-5)(\sqrt{x}-a)=0$.

28.223. Решите неравенство:

1) $\sqrt{3x+5}>\sqrt{4x-3}$;
2) $\sqrt{x^2-4x-5}<\sqrt{x+9}$;
3) $\sqrt{x^2+6x}\leqslant x+2$;
4) $\sqrt{12+x-x^2}\leqslant x+3$;
5) $\sqrt{x^2+6x+8}\geqslant x+4$;
6) $\sqrt{4x^2-7}\geqslant 5-x$;
7) $(x-7)\sqrt{x^2-3x+18}\geqslant 0$;
8) $(x^2-10x+9)\sqrt{x^2-6x-16}\geqslant 0$;
9) $x^2-x+3\sqrt{x^2-x-2}-12<0$;
10) $\sqrt{5-x}+2\sqrt{13-x}<7$;
11) $\sqrt{x-4}+\sqrt{14-x}<4$;
12) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+6}>1$.

11. Уравнения и неравенства с двумя переменными

28.224. Решите уравнение:

1) $13x^2-12xy+4y^2-4x+1=0$;
2) $|y|+2=\sqrt{4-x^2}$.

28.225. Решите уравнение:

1) $x^2+25y^2-6xy-24y+9=0$;
2) $9-x^2=\sqrt{3+|y|}$.

28.226. Постройте график уравнения:

1) $(x-3)^2=(y+5)^2$;
2) $x^2y=|y|$;
3) $x+2=\sqrt{|y|-1}$;
4) $|y-1|=\sqrt{x}$;
5) $|y-3|+|x|=1$;
6) $|x|-3=\sqrt{9-y^2}$;
7) $\dfrac{y-x^2}{1-x^2}=1$.

28.227. Постройте график уравнения:

1) $(x-1)^2=(x+2y)^2$;
2) $x|y|=x^2$;
3) $x+2=\sqrt{|y-1|}$;
4) $|y|-1=\sqrt{x}$;
5) $|y+1|+|x-2|=2$;
6) $(|x|-1)^2+(|y|-3)^2=4$;
7) $\dfrac{(x^2-4)(x+y)}{y^2-1}=0$.

28.228. Найдите все пары чисел $(x;\,y)$, удовлетворяющие уравнению:

1) $\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{y-2}=0$;
2) $\sqrt{x^2-6x+5}+\sqrt{y^2-y-2}=0$;
3) $\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2-1}+\sqrt{y^2-1}=0$.

28.229. Постройте график неравенства:

1) $x>|y+2|-2$;
2) $|x|\leqslant|y^2-2y|$;
3) $(x+y)|y|\geqslant 0$;
4) $(x^2+y^2-1)\,y^2\leqslant 0$.

28.230. Постройте график неравенства:

1) $y \leqslant |x-3|+1$;

2) $|x-2|-|y+1|>2$;

3) $(x-y)|x|<0$;

4) $\dfrac{x^2+y^2-1}{y^2} \geqslant 0$.

28.231. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} x+2y>1, \\ x-y \leqslant 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 1, \\ (x+1)^2+y^2 \leqslant 1. \end{cases}$

28.232. Изобразите на координатной плоскости xy множество решений системы неравенств:

1) $\begin{cases} y+x-2>0, \\ x-3y \leqslant 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2+y^2 \leqslant 4, \\ y \geqslant |x|+1. \end{cases}$

28.233. Постройте график неравенства:

1) $\sqrt{x-2y} > \sqrt{x+y}$;

2) $x < \dfrac{6}{y}$.

28.234. Постройте график неравенства:

1) $\sqrt{2x-y} < \sqrt{x-y}$;

2) $y > -\dfrac{12}{x}$.

12. Функции и их свойства

28.235. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x+3)(x-2)}{x}}$;

2) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-5x+4}}$;

3) $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3}}$;

4) $f(x) = \sqrt{12x^2-4x^3-9x} - \sqrt{2-|x|}$;

5) $f(x) = \sqrt{\dfrac{7-x}{\sqrt{4x^2-19x+12}}}$;

6) $f(x) = \sqrt{|x-1|(3x-6)} + \dfrac{3}{x^2+4x-21}$.

28.236. Найдите область значений функции:

1) $y = -\dfrac{1}{3}x^2+2x$;

2) $y = \dfrac{1}{1+x^2}$;

3) $y = \dfrac{2x-1}{x+2}$;

4) $y = x+\dfrac{1}{x}$;

5) $y = \sqrt{x^2+2x+2}$;

6) $y = 5-\sqrt{x^2-6x+10}$.

28.237. Найдите область определения и постройте график функции:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 8x + 16}{4 - x}$; 3) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4}$;

2) $f(x) = \dfrac{4x - 16}{x^2 - 4x}$; 4) $f(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x - 3}$.

28.238. Постройте график функции:

1) $y = (|x| - 1)^2$; 3) $y = \sqrt{|1 - x|}$; 5) $y = \left|\sqrt{|x| - 2} - 1\right|$;

2) $y = \sqrt{1 - |x|}$; 4) $y = \sqrt{|x + 2| - 1}$; 6) $y = \left|\sqrt{2x - 1} - 2\right|$.

28.239. Постройте график функции:

1) $y = \dfrac{1}{|x| - 2}$; 3) $y = \dfrac{1}{|x + 1| - 2}$; 5) $y = \left|\dfrac{1}{|x| - 1} - 2\right|$;

2) $y = \left|\dfrac{1}{x - 4}\right|$; 4) $y = (|x - 2| + 1)^2$; 6) $y = \left|\sqrt{2x + 1} - 2\right|$.

28.240. Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \dfrac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x^2 - 4}$; 3) $y = \dfrac{1}{(4x - 2)^5} + \dfrac{1}{(4x + 2)^5}$;

2) $y = \dfrac{x^5}{\sqrt{2 - x} - \sqrt{2 + x}}$; 4) $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 1} - \dfrac{2x - 1}{x^2 + 3x + 1}$.

28.241. На рисунке 28.6 изображена часть графика функции $y = g(x)$, определённой на промежутке $[-5; 5]$. Постройте график этой функции, если она является: 1) чётной; 2) нечётной.

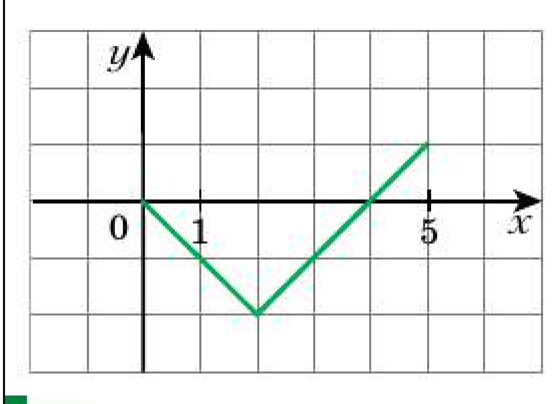


Рис. 28.6

28.242. График квадратичной функции — парабола с вершиной в точке $A(0; 3)$, проходящая через точку $B(2; -29)$. Задайте эту функцию формулой.

28.243. При каких значениях p и q вершина параболы $y = x^2 + px + q$ находится в точке $(3; 4)$?

28.244. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке $M(1; -1)$ и проходит через точку $K(-2; 3)$. Найдите значения коэффициентов a, b и c.

28.245. Найдите наименьшее значение функции $y = 1{,}5x^2 - 6x + 1$ на промежутке:

1) $[-4; 1]$; 2) $[-3; 1]$; 3) $[4; 6]$.

28.246. При каком значении c наибольшее значение функции $y = -4x^2 + 8x + c$ равно -6?

28.247. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^6$ на промежутке: 1) $[0; 2]$; 2) $[-2; -1]$; 3) $[-2; 2]$.

28.248. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^{-3}$ на промежутке: 1) $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$; 2) $[-2; -1]$.

28.249. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 10}$.

28.250. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = \frac{2}{x^2 - 6x + 11}$.

28.251. Найдите:

1) $\max\limits_{R} \frac{1}{x^2 + 2}$; 2) $\min\limits_{M} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$, где $M = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

28.252. Найдите:

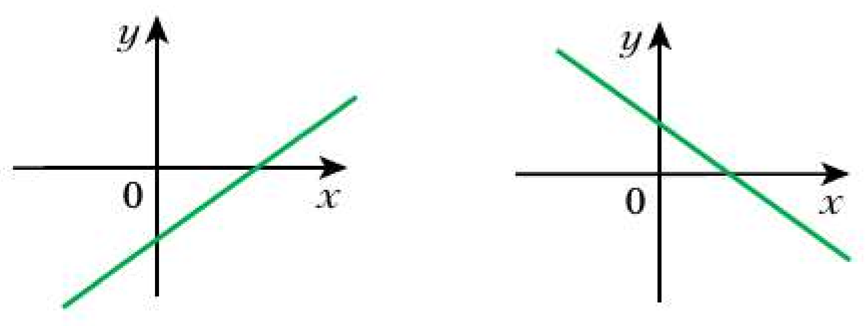
1) $\min\limits_{R} \frac{1}{-x^2 + 2x - 3}$; 2) $\max\limits_{M}(\sqrt{2 - x} + \sqrt{x + 1})$, где $M = [-1; 2]$.

28.253. На рисунке 28.7 изображён график линейной функции $y = kx + b$. Укажите верное утверждение:

1) $k > 0$, $b > 0$; 3) $k < 0$, $b > 0$;
2) $k > 0$, $b < 0$; 4) $k < 0$, $b < 0$.

28.254. На рисунке 28.8 изображён график функции $y = a\sqrt{x + b}$. Укажите верное утверждение:

1) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$;
2) $a > 0$, $b < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$.



а б

Рис. 28.7

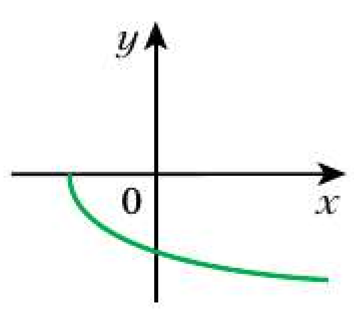
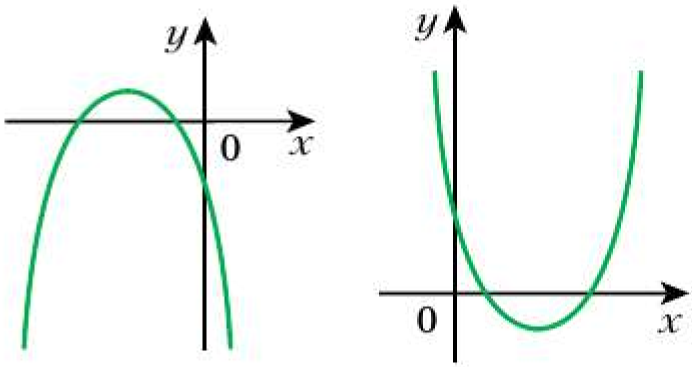


Рис. 28.8

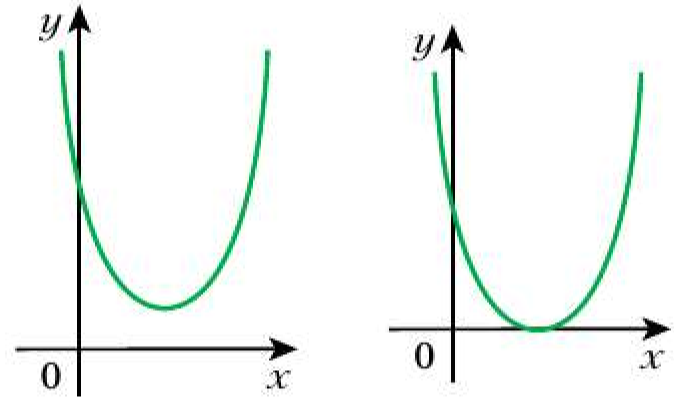
28.255. Вершина параболы $y = (x + a)^2 + b$ лежит в третьей координатной четверти. Укажите верное утверждение:

1) $a > 0$, $b > 0$; 3) $a < 0$, $b > 0$;
2) $a > 0$, $b < 0$; 4) $a < 0$, $b < 0$.



а *б*

Рис. **28.9**



а *б*

Рис. **28.10**

28.256. На рисунке 28.9 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

28.257. На рисунке 28.10 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Определите знаки коэффициентов a, b и c.

28.258. Верно ли утверждение, что на рисунке 28.11 изображены парабола $y = ax^2 + bx + c$ и прямая $y = bx + c$?

28.259. Какой из графиков, изображённых на рисунке 28.12, является графиком обратимой функции?

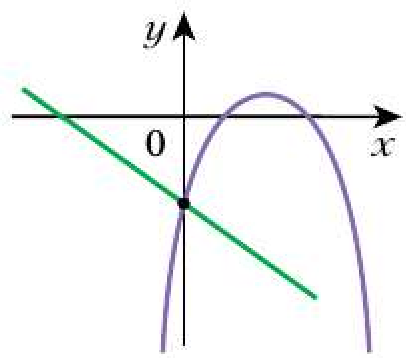


Рис. **28.11**

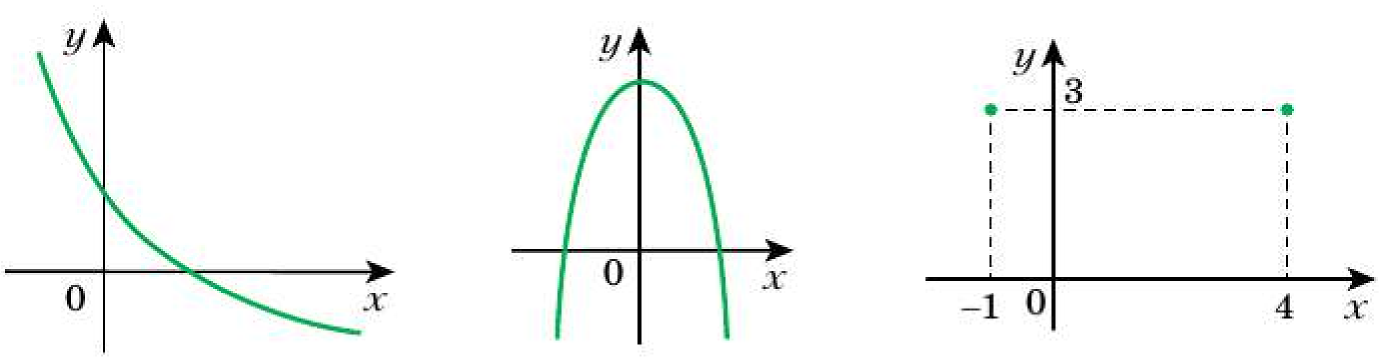


Рис. **28.12** *а* *б* *в*

28.260. Является ли обратимой функция:

1) $y = x^4$, $x \in [1; +\infty)$; 2) $y = x^4$, $x \in [-2; 0]$?

28.261. Докажите, что функции f и g являются взаимно обратными:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, $g(x) = \dfrac{2x+1}{x}$; 2) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

28.262. Найдите функцию, обратную к данной:

1) $y = 3x + 5$; 3) $y = 2 + \sqrt{x - 3}$;

2) $y = \frac{4}{x-1}$; 4) $y = x^2$, $x \in [2; +\infty)$.

28.263. Функция g является обратной к функции $f(x) = x^2 - 17$, $x \in (-\infty; 0)$. Найдите $g(19)$.

28.264. Функция g является обратной к функции $f(x) = x^3 + x - 3$. Решите уравнение $g(x) = x^3 + x + 3$.

28.265. Функция g является обратной к функции $f(x) = x^3 + x + 12$. Решите уравнение $g(x) = x^3 + x - 12$.

28.266. Для каждого значения параметра a найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве M:

1) $f(x) = x^2 + 4x + 5a$, $M = [-1; 1]$;

2) $f(x) = x^2 - 4x$, $M = [-1; a]$, где $a > -1$.

28.267. Для каждого значения параметра a найдите наибольшее и наименьшее значения функции f на множестве M:

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 2a$, $M = [0; 4]$;

2) $f(x) = 2x - x^2$, $M = [a; 2]$, где $a < 2$.

28.268. Определите, сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $|x^2 - 6|x| + 8| = a$.

28.269. Определите, сколько корней в зависимости от значения параметра a имеет уравнение $|x^2 + 2|x - 2| - 4| = a$.

13. Прогрессии

28.270. Найдите разность арифметической прогрессии (x_n), если:

1) $x_1 = 17$, $x_9 = -7$; 2) $x_5 = -3$, $x_{14} = 42$.

28.271. Найдите первый член арифметической прогрессии (y_n), если:

1) $y_{10} = -19$, $d = -2$; 2) $y_5 = 13$, $y_{16} = 46$.

28.272. Найдите номер члена арифметической прогрессии (z_n), равного 3,2, если $z_1 = 9{,}2$ и $d = -0{,}6$.

28.273. Является ли число 24 членом арифметической прогрессии (b_n), если $b_1 = 8$ и $d = 3$? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

28.274. Дана арифметическая прогрессия 4,9; 4,5; 4,1; ... . Начиная с какого номера её члены будут отрицательными?

28.275. Найдите количество отрицательных членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -30$, $d = 1{,}2$.

28.276. При каком значении m значения выражений $3m - 1$, $m^2 + 1$ и $m + 3$ будут последовательными членами арифметической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

28.277. Арифметическая прогрессия (a_n) задана формулой n-го члена $a_n = 0{,}2n + 5$. Найдите сумму двадцати шести первых членов прогрессии.

28.278. Найдите сумму десяти первых членов арифметической прогрессии (a_n), если:

1) $a_1 = 6$, $a_{14} = 45$; 2) $a_6 = 34$, $a_{14} = -54$.

28.279. Найдите сумму пятнадцати первых членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_{15} = 71$, $d = 6{,}5$.

28.280. При любом n сумму n первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = 3n^2 - 4n$. Найдите первый член и разность этой прогрессии.

28.281. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 11, которые не больше 341.

28.282. Найдите сумму всех натуральных чисел, кратных 9, которые не больше 156.

28.283. Сумма шестого и двадцать пятого членов арифметической прогрессии равна 14. Найдите сумму первых тридцати членов этой прогрессии.

28.284. Найдите сумму первых тридцати пяти членов арифметической прогрессии, если её восемнадцатый член равен 8.

28.285. Вычислите сумму первых пятнадцати чётных натуральных чисел.

28.286. Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных числу 8.

28.287. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_1 = 108$, $b_4 = 32$; 2) $b_2 = 6$, $b_4 = 30$.

28.288. Найдите первый член геометрической прогрессии (c_n), если $c_4 = 40$, $c_7 = -320$.

28.289. Число 192 является членом геометрической прогрессии $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, 3, ... Найдите номер этого члена.

28.290. Какие три числа надо вставить между числами 48 и 243, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

28.291. При каком значении x значения выражений $2x - 1$; $x + 1$ и $5 - x$ являются последовательными членами геометрической прогрессии? Найдите члены этой прогрессии.

28.292. Найдите сумму четырёх первых членов геометрической прогрессии (b_n), если:

1) $b_4 = 280$, $q = 5$; 2) $b_1 = \sqrt{2}$, $b_5 = 4\sqrt{2}$, $q < 0$.

28.293. Найдите первый член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 72, а знаменатель равен $\frac{3}{8}$.

28.294. Найдите пятый член бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен -12, а сумма равна -8.

28.295. Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии (b_n), если $b_2 = 108$, $b_4 = 48$.

28.296. Произведение трёх чисел, образующих геометрическую прогрессию, равно -64. Найдите второй член этой прогрессии.

14. Тригонометрические функции

28.297. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $6 + \sin^2 \alpha$;

2) $\dfrac{\sin\alpha(5 + \cos\alpha)}{\sin\alpha}$.

28.298. Сравните:

1) $\operatorname{tg} 140^\circ$ и $\operatorname{tg}(-140^\circ)$;

2) $\cos 50^\circ$ и $\sin 350^\circ$;

3) $\operatorname{ctg}\dfrac{6\pi}{5}$ и $\cos\dfrac{5\pi}{7}$;

4) $\cos 5$ и $\sin 4$.

28.299. Сравните с нулём значение выражения:

1) $\sin 102^\circ \cos 350^\circ$;

2) $\sin 134^\circ \cos 131^\circ$;

3) $\dfrac{\sin 157^\circ}{\cos 256^\circ}$;

4) $\dfrac{\cos 142^\circ}{\sin 72^\circ}$;

5) $\sin 112^\circ \cos(-128^\circ) \operatorname{tg} 198^\circ$;

6) $\sin(-245^\circ) \operatorname{tg} 183^\circ \operatorname{ctg}(-190^\circ)$.

28.300. Чётной либо нечётной является функция, заданная формулой:

1) $f(x) = 2x + \sin x$;

2) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x^2 - 1}$;

3) $f(x) = \dfrac{x^4 \cos x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$;

4) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x^3 - 1}$;

5) $f(x) = \operatorname{tg} x + x^2$;

6) $f(x) = \dfrac{(2 - x)\cos x}{2 - x}$?

28.301. Найдите главный период функции:

1) $f(x) = \cos\left(\dfrac{x}{2} + 2\right)$;

2) $f(x) = \operatorname{tg}(-x + 1)$;

3) $f(x) = \operatorname{tg}(4\pi x - 3)$.

28.302. Постройте график функции:

1) $y = \sin x + 1$;

2) $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$;

3) $y = 1{,}5\sin x$;

4) $y = \cos\dfrac{x}{3}$;

5) $y = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1$;

6) $y = -\dfrac{1}{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) + 2$.

28.303. Постройте график функции:

1) $y = (\sqrt{\cos 2x})^2$;
2) $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}|x|$;
3) $y = \sqrt{-\cos^2 x}$;
4) $y = \dfrac{\operatorname{ctg}|x|}{\operatorname{ctg} x}$;
5) $y = \sqrt{\cos x - 1}$;
6) $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$;
7) $y = \operatorname{ctg} x \sin x$;
8) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\sin^2 x}}$;
9) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

28.304. Сколько корней имеет уравнение $\sin x = \dfrac{x}{10\pi}$?

28.305. Постройте график уравнения:

1) $\sin x = 0$;
2) $y \sin x = 0$;
3) $x^2 + \sin^2 x = 0$;
4) $|y| = \sin x$;
5) $y \operatorname{tg} x = 0$;
6) $\operatorname{tg} \pi (x^2 - y) = 0$;
7) $\operatorname{tg}(\pi(2|x| + |y|)) = 0$.

28.306. Вычислите значения тригонометрических функций аргумента α, если:

1) $\cos \alpha = -\dfrac{2}{7}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;
2) $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

28.307. Упростите выражение:

1) $\operatorname{ctg} x - \dfrac{\sin x}{1 - \cos x}$;
2) $\dfrac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} + \dfrac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi}$;
3) $\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$;
4) $\dfrac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$.

28.308. Докажите тождество:

1) $\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$;
2) $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$;
3) $1 + (\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha$.

28.309. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

1) $3\cos^2 \alpha + 2\sin^2 \alpha$;
2) $3\sin^2 \alpha - 2\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$.

28.310. Упростите выражение:

1) $\sqrt{1 - \cos^2 \dfrac{\alpha}{2}} - \sqrt{1 - \sin^2 \dfrac{\alpha}{2}}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$;
2) $\sqrt{\dfrac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\dfrac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

28.311. Дано: $\sin \alpha + \cos \alpha = b$. Найдите $\dfrac{1}{\sin^4 \alpha} + \dfrac{1}{\cos^4 \alpha}$.

28.312. Дано: $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = b$. Найдите $\operatorname{tg}^4 \alpha + \operatorname{ctg}^4 \alpha$.

28.313. Докажите тождество:

1) $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha;$

2) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)+2\sin\beta\cos\alpha}=\operatorname{ctg}(\alpha+\beta);$

3) $\sin 12\alpha\operatorname{ctg}6\alpha-\cos 12\alpha=1;$

4) $1-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

28.314. Упростите выражение:

1) $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha;$ 2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}.$

28.315. Найдите наибольшее значение выражения:

1) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha;$ 2) $4\sin\alpha-3\cos\alpha.$

28.316. Дано: $\sin 10^\circ=b$. Найдите $\sin 35^\circ$.

28.317. Дано: $\operatorname{tg}(\alpha-45^\circ)=3$. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$.

28.318. Дано: $\operatorname{tg}(5^\circ+\alpha)=\dfrac{1}{3}$, $0^\circ<\alpha<40^\circ$. Найдите $\cos(50^\circ+\alpha)$.

28.319. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=5$, $\operatorname{ctg}\beta=\dfrac{2}{3}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$. Докажите, что $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

28.320. Вычислите $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)$, если $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

28.321. Вычислите $(1+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\operatorname{ctg}\beta)$, если $\alpha+\beta=\dfrac{3\pi}{4}$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

28.322. Упростите выражение:

1) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)\sin(2\pi-\alpha);$

2) $\dfrac{\sin(180^\circ-\alpha)\cos(180^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}{\sin(270^\circ-\alpha)\operatorname{ctg}(270^\circ+\alpha)\cos(90^\circ+\alpha)};$

3) $\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{5\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)+\sin(3\pi-\alpha)\right)^2-\dfrac{2\cos^2(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\alpha-\pi)};$

4) $\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)}{\operatorname{ctg}^2(x-2\pi)}+\dfrac{\sin^2(-x)}{\operatorname{ctg}^2\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)};$

5) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)};$

6) $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha).$

28.323. Вычислите:

1) $\dfrac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}$; 2) $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}$.

28.324. Упростите выражение:

1) $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$;

2) $\sin\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{4}\cos\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $\dfrac{\sin 6\alpha}{\sin 2\alpha}+\dfrac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha}$;

4) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$;

5) $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

6) $\dfrac{1-2\sin^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{4}-2\alpha\right)\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{4}+2\alpha\right)}$;

7) $\dfrac{2\cos^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}$;

8) $\dfrac{\cos^4(\alpha-\pi)}{\cos^4\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)+\sin^4\left(\alpha+\dfrac{3\pi}{2}\right)-1}$.

28.325. Дано: $\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}=0,4$. Найдите $\operatorname{tg}\left(45^\circ+\dfrac{x}{2}\right)$.

28.326. Докажите тождество:

1) $\operatorname{tg}2\alpha(1+\cos 4\alpha)-\sin 4\alpha=0$; 2) $\dfrac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

28.327. Докажите, что $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\dfrac{1}{8}$.

28.328. Докажите, что:

1) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha\cos 16\alpha\cos 32\alpha=\dfrac{\sin 64\alpha}{64\sin\alpha}$;

2) $\cos\dfrac{\pi}{15}\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{3\pi}{15}\cdot\ldots\cdot\cos\dfrac{7\pi}{15}=\dfrac{1}{128}$.

28.329. Найдите $\sin 2\alpha$, если $2\operatorname{tg}^2\alpha-7\operatorname{tg}\alpha+3=0$ и $\dfrac{5\pi}{4}<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.

28.330. Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$. Найдите $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

28.331. Докажите тождество:

1) $\sin 3\alpha - \sin\alpha + \sin 7\alpha - \sin 5\alpha = 4\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$;

2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) = 4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha$;

3) $\frac{\sin 6\alpha + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha - \sin 2\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

4) $\frac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = -\operatorname{tg} 2\alpha$;

5) $\left(\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\right)\cdot\frac{\cos\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha} = -4\sin 3\alpha$;

6) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$.

28.332. Упростите выражение:

1) $\left(\frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos 5\alpha}\right)\cdot\frac{\sin 7\alpha - \sin 3\alpha}{\cos 4\alpha - 1}$;

2) $\frac{1 - \cos(2\alpha - \pi) + \cos(4\alpha + 2\pi) - \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 6\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) + 1 - 2\sin^2(2\pi - 2\alpha)}$;

3) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right)$.

28.333. Докажите тождество:

1) $\sin 2\alpha + 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = -1$;

2) $\sin 8\alpha\sin 4\alpha + \cos 7\alpha\cos 5\alpha = \cos 3\alpha\cos\alpha$.

28.334. Вычислите:

1) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

2) $\cos\left(2\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

3) $\sin\left(2\operatorname{arctg} 1 - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

4) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

28.335. Найдите область определения функции:

1) $y = \arcsin(x - 5)$;

2) $y = \arccos\frac{x^2 + 1}{2x}$;

3) $y = \arccos(x^2 - 3)$;

4) $y = \sqrt{-\arccos x}$;

5) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{6 - x}$;

6) $y = \arccos(-1 - x^2)$.

28.336. Вычислите:

1) $\sin(\operatorname{arctg} 3)$; 2) $\cos\left(-\operatorname{arcctg}\left(-\frac{7}{8}\right)\right)$.

28.337. Решите неравенство:

1) $\arcsin x \leqslant -\frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}$.

28.338. Найдите область значений функции:

1) $y = 2\arcsin x - \frac{\pi}{4}$; 2) $y = 5 - 3\operatorname{arctg} \frac{x}{2}$.

15. Тригонометрические уравнения и неравенства

28.339. Решите уравнение:

1) $6\cos^2 x + 5\sin x - 7 = 0$; 3) $\cos 2x - 3\sin x = 2$;

2) $\sin^2 3x + 3\cos 3x = 3$; 4) $2\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 2\operatorname{ctg}\frac{x}{3} = 5$.

28.340. Решите уравнение:

1) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

2) $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$;

3) $4\sin^2 x + \sin 2x = 3$;

4) $\sin x - 4\cos x = 1$;

5) $6\sin^2 x + 2\sin 2x + 4\cos^2 x = 3$;

6) $\dfrac{2\sin x - \cos x}{5\sin x - 4\cos x} = \dfrac{1}{3}$;

7) $8\sin^2 x + 4\sin^2 2x + 8\cos 2x = 5$;

8) $\sin^2 x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.

28.341. Решите уравнение:

1) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 2 = 0$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$;

3) $\cos x + \cos 7x = \cos 3x + \cos 5x$;

4) $\cos x - \cos 3x + \sin x = 0$;

5) $\sin 3x - 2\sin x = 0$;

6) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.

28.342. Решите уравнение:

1) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \cos^2 3x = 0{,}5$;

2) $\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$.

28.343. Решите уравнение:

1) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$; 2) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin 2x$.

28.344. Решите уравнение:

1) $\sin(60^\circ + x)\cos(x - 30^\circ) = 1$;
2) $\cos 6x \cos x = \cos 5x$;
3) $\sin 6x \cos 4x = \sin 10x \cos 8x$;
4) $4\sin^2 2x = 3 - 2\sin 6x \sin 2x$.

28.345. Решите уравнение:

1) $\dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = 0$;
2) $\dfrac{\sin x + \sin 3x}{\cos x - \cos 3x} = 0$;
3) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \sin x} = 2\cos x$;
4) $\dfrac{1 + \cos x - \sin x}{\cos x} = 0$.

28.346. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin^2 x - 0{,}5\sin 2x = 1$.

28.347. Сколько корней уравнения $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0$ принадлежат промежутку $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$?

28.348. Решите неравенство:

1) $\sin 3x > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;
2) $\cos \dfrac{x}{2} \leqslant \dfrac{1}{2}$;
3) $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;
4) $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \geqslant -\dfrac{1}{2}$;
5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;
6) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{2x}{3} - \dfrac{\pi}{5}\right) \geqslant -1$.

16. Показательная функция. Показательные уравнения и неравенства

28.349. На одном из рисунков 28.13, *а–г* изображён график функции $y = 0{,}2^{-x}$. Укажите этот рисунок.

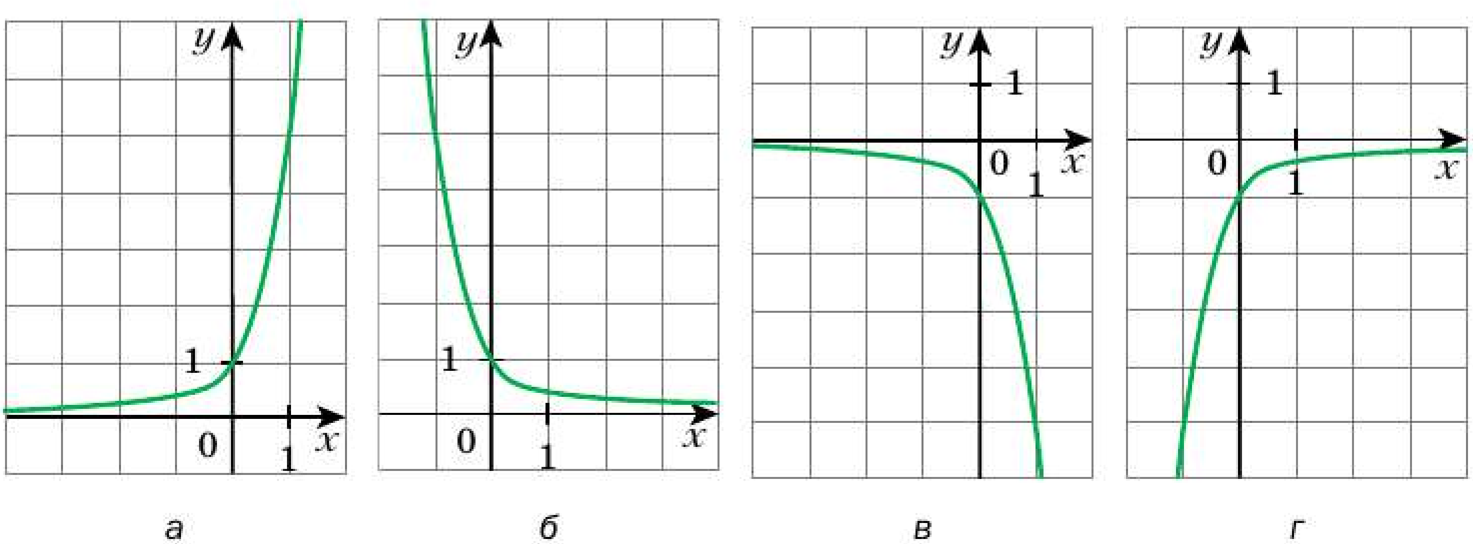


Рис. 28.13

28.350. На одном из рисунков 28.14, *а–г* изображён график функции $y = e^x - 1$. Укажите этот рисунок.

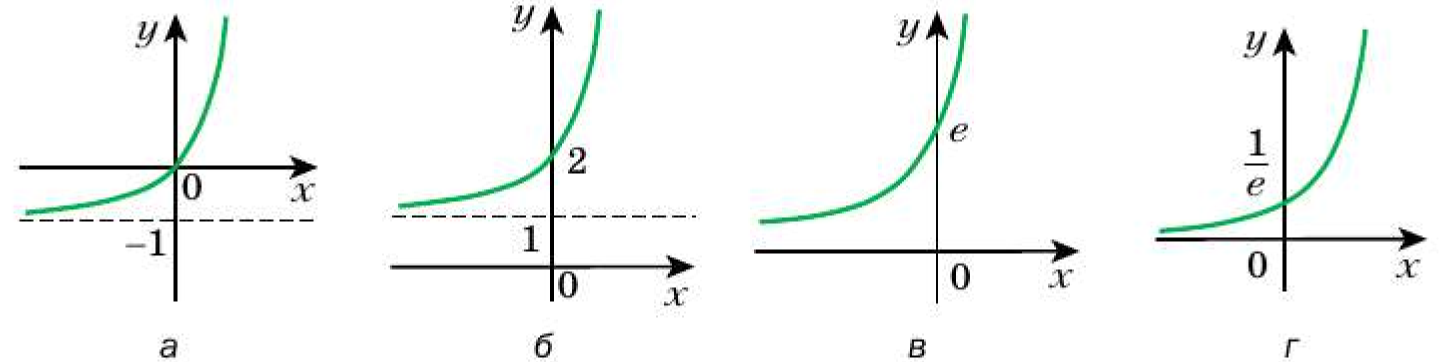


Рис. **28.14**

28.351. Решите уравнение:

1) $8^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{4}$;

2) $(0{,}75)^{x+1} = \frac{16}{9}$;

3) $\sqrt{125^{x-1}} = \sqrt[3]{25^{2-x}}$;

4) $\left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^x = \frac{125}{216}$;

5) $2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x = 90^{3x-7}$;

6) $8 \cdot 7^{2x^2-x} - 7 \cdot 8^{2x^2-x} = 0$.

28.352. Решите уравнение:

1) $3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 7$;

2) $2^{x+1} + 2^{x-3} = 68$;

3) $7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$;

4) $4^{\frac{x}{2}} + 2^{x-5} - 2^{x-7} = 262$;

5) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 3^{x-1} - 3^{x-2} + 3^{x-3}$;

6) $2^{2x-1} + 2^{2x-3} - 2^{2x-5} = 2^{7-x} + 2^{5-x} - 2^{3-x}$.

28.353. Решите уравнение:

1) $4^x - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$;

2) $9^x + 3^x - 6 = 0$;

3) $49^x + 2 \cdot 7^x - 35 = 0$;

4) $\frac{16 - 3^{2x}}{3^x + 4} = 1$;

5) $8^{\frac{2}{x}} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$;

6) $9 - 2^x = 2^{3-x}$;

7) $2^{\sin^2 x} + 5 \cdot 2^{\cos^2 x} = 7$;

8) $(0{,}2)^{2x-2} - 126 \cdot (0{,}2)^x + 5 = 0$;

9) $3^{1+\sqrt{x+1}} = 28 - 3^{2-\sqrt{x+1}}$;

10) $\frac{5}{3^{x-1}} - \frac{2}{3^x - 1} = 4$.

28.354. Решите уравнение:

1) $3^x - 5 \cdot 6^{\frac{x}{2}} - 50 \cdot 2^x = 0$;

2) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$;

3) $5^{2x+1} - 3 \cdot 10^x = 2^{2x+1}$;

4) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$.

28.355. Найдите множество решений неравенства:

1) $\left(\frac{1}{27}\right)^{2-x} > 9^{2x-1}$;

2) $1 < 10^{x+1} \leqslant 100\,000$;

3) $0{,}04 \leqslant 5^{2-x} \leqslant 25$;

4) $1{,}3^{x^2-4x+2} \leqslant 1{,}69$;

5) $0{,}4^{x^2+2x+2} \leqslant 0{,}16$;

6) $4{,}5^{\frac{x^2-9x+14}{x-3}} \geqslant 1$;

7) $0{,}9^{\frac{6-x}{x^2-2x-3}} \leqslant 1$;

8) $7 \cdot 343^{\frac{2x^2+1}{x}} - 49^{3x} < 0$.

28.356. Решите неравенство:

1) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} > 13$;

2) $5^{x+1} + 5^{x-2} < 630$;

3) $0{,}5^{x+3} - 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x+1} < 0{,}375$;

4) $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 3^{x-2} > 17$;

5) $4^{x-2} - 3 \cdot 2^{2x-1} + 5 \cdot 64^{\frac{x}{3}} \leqslant 228$;

6) $6 \cdot 0{,}5^{x+2} + 0{,}5^{x-3} \geqslant 19$.

28.357. Решите неравенство:

1) $25^x - 2 \cdot 5^x - 15 > 0$;

2) $4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 \leqslant 0$;

3) $3^{x+2} - 28 \cdot 3^{0,5x} + 3 \geqslant 0$;

4) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 \leqslant 0$;

5) $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 2^{1-x} - 8 \geqslant 0$;

6) $7^x + 7^{2-x} - 50 \geqslant 0$.

17. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства

28.358. Вычислите:

1) $\lg 20 + \lg 50$;

2) $\log_3 7 - \log_3 \frac{7}{27}$;

3) $5^{-2\log_{25}\frac{1}{4} + \log_5 2}$;

4) $3\lg 5 + \frac{1}{2}\lg 64$;

5) $\frac{\lg 27 + \lg 12}{\lg 2 + 2\lg 3}$;

6) $\log_{\sqrt{2}} 12 - \log_2 9$;

7) $\log_4 \log_{14} 196 + \log_5 \sqrt{5}$;

8) $36^{\log_6 7} + 10^{2-\lg 4} - 7^{\log_{49} 25}$.

28.359. Найдите область определения функции:

1) $y = \ln \frac{x+1}{4-5x}$;

2) $y = \log_6(4^x - 3 \cdot 2^x + 2)$;

3) $y = \lg \lg x$;

4) $y = \frac{x-2}{\log_2(x^2-8)}$;

5) $y = \lg(5x - x^2) + \frac{1}{\lg(2-x)}$;

6) $y = \log_{x-2}(x^2 + x - 3)$.

28.360. На рисунке 28.15 изображён график убывающей функции $y = f(x)$, определённой на множестве действительных чисел. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = \log_4 x$?

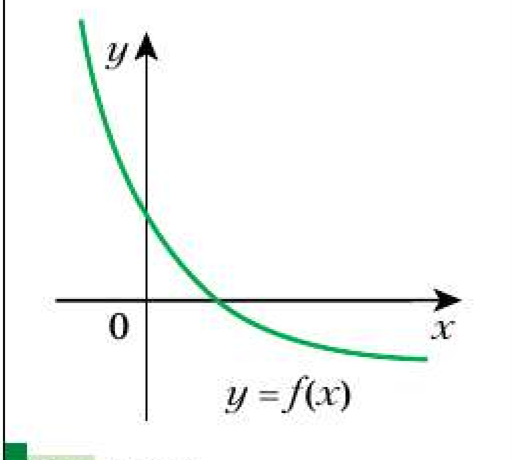


Рис. 28.15

28.361. Постройте график функции:

1) $y = 5^{\log_5 (x-1)}$;

2) $y = 2^{-\log_2 x}$;

3) $y = 10^{\lg \sin x}$;

4) $y = e^{\ln(4-x^2)}$;

5) $y = \sqrt{\ln \sin x}$;

6) $y = \sqrt{\log_5^2 x} \cdot \log_x 5$.

28.362. Между какими двумя последовательными целыми числами расположено на координатной прямой число:

1) $\lg 50$; 2) $\log_3 8$; 3) $\log_{\frac{1}{5}} 30$; 4) $\log_{0,1} 4,37$?

28.363. Решите уравнение:

1) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) = -1$;

2) $\lg x = 3 - \lg 20$;

3) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$;

4) $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$;

5) $100^{\lg (x + 10)} = 10\,000$;

6) $\log_2(9 - 2^x) = 7^{\log_7 (3 - x)}$;

7) $\log_{2x} 64 - \log_{2x} 4 = 2$;

8) $\log_{x-1}(2x^2 - 4x + 1) = 2$;

9) $\dfrac{\log_2(x^2 - x - 16) - 2}{\log_5(x - 4)} = 0$.

28.364. Решите уравнение:

1) $\lg (5x + 2) = \dfrac{1}{2} \lg 36 + \lg 2$;

2) $\log_5(250 - x^3) = 3\log_5 x$;

3) $\log_9(4x - 6) = \log_9(2x - 4)$;

4) $\dfrac{1}{2} \lg (3x^2 + 25) = \lg (3x - 5)$;

5) $\lg (2x + 1) = 0,5\lg (1 - 3x)$;

6) $\log_6(x^2 - x - 2) = \log_6(2x^2 + x - 1)$;

7) $2\log_7(-x) = \log_7(x + 6)$;

8) $\ln (x^2 - 2x - 8) = 2\ln \sqrt{-4x}$.

28.365. Решите уравнение:

1) $\lg (2x - 1) + \lg (x + 5) = \lg 13$;

2) $\log_3(2x - 7) + \log_3(x - 1) = 2 + \log_3 2$;

3) $\log_{0,5}(4 - x) + \log_{0,5}(x - 1) = -1$;

4) $\log_7(-x) + \log_7(1 - x) = \log_7(x + 3)$.

28.366. Решите уравнение:

1) $3\log_3^2 x + 7\log_3 x - 6 = 0$;

2) $\ln^2 x - 4\ln x - 21 = 0$;

3) $\frac{2}{\lg x + 2} - \frac{1}{\lg x - 4} = 1$;

4) $\lg^2 x + 2\lg x - 20 = 5^{\log_5 \lg x}$;

5) $\log_3 x^2 \cdot \log_3 \frac{x}{9} = 6$;

6) $\log_5^2 x^3 - 5\log_5 x^2 + 1 = 0$;

7) $\log_7 \frac{7}{x} + \log_7^3 x = 1$;

8) $\log_9 x + \log_x 9 = 2{,}5$.

28.367. Решите уравнение:

1) $x^{\log_5 x - 2} = 125$;

2) $x^{\lg x} = 100x$;

3) $x^{2\log_7 x} = 7x$;

4) $x^{\log_6 x} = \frac{36}{x}$.

28.368. Найдите множество решений неравенства:

1) $\log_7(2x - 1) < 2$;

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 3) > 1$;

3) $\log_4(x + 1) < -\frac{1}{2}$;

4) $\lg(x^2 + x + 8) > 1$;

5) $\log_{0,2}(x^2 + 4x) \geqslant -1$;

6) $\log_5(x^2 + 2x - 3) \leqslant 1$;

7) $\log_{0,6}(x^2 + 4x + 4) > 0$;

8) $\log_3 \frac{2x + 1}{x + 1} \geqslant 1$;

9) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{x + 2}{x^2} < 0$.

28.369. Решите неравенство:

1) $\log_6(x + 1) < \log_6(2x + 5)$;

2) $\log_2(2x - 3) > \log_2(3x - 5)$;

3) $\ln(x^2 - 3) > \ln(3x - 7)$;

4) $\log_{0,7}(3x - 1) < \log_{0,7}(3 - x)$;

5) $\log_{0,4}(x^2 + 1) > \log_{0,4}(2x + 25)$;

6) $\log_{\frac{1}{9}}(1 - x^2) > \log_{\frac{1}{9}}(2x + 2)$;

7) $2\log_3 x - \log_3(2x + 9) \leqslant 1$;

8) $\lg \frac{x + 3}{x + 4} > \lg \frac{x + 5}{x + 2}$.

28.370. Найдите область определения функции:

1) $f(x) = \sqrt{\log_{0,7} \frac{x + 1}{x - 5}}$;

2) $f(x) = \log_3 \log_{0,3} \frac{x - 2}{x + 3}$.

28.371. Решите неравенство:

1) $\log_2 x + \log_2(x + 1) \leqslant 1$;

2) $\log_{\frac{1}{6}} x + \log_{\frac{1}{6}}(x - 1) \geqslant \log_{\frac{1}{6}}(x + 3)$;

3) $\log_3(4 - x) + \log_3(x + 3) \leqslant 1 + \log_3(x - 1)$;

4) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 2) + \log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 3 - 1$.

28.372. Решите неравенство:

1) $\lg^2 x - \lg x \geqslant 0$;

2) $\ln^2 x + \ln x \leqslant 0$;

3) $3\log_8^2 x + 2\log_8 x - 5 \geqslant 0$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}^2(-x) - \log_{\frac{1}{3}}(-x) \leqslant 2$;

5) $\dfrac{\lg^2 x - 3\lg x + 3}{\lg x - 1} > 1$;

6) $\dfrac{\log_6^2 x + 2\log_6 x - 6}{\log_6 x} < 1$.

18. Производная и её применение

28.373. Найдите производную функции:

1) $y = x^6 + 2x^4 + \dfrac{4}{x^2} - 1$;

2) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - 4x + 1)$;

3) $y = \dfrac{3x - 1}{x^2 + 1}$;

4) $y = (3 - 2x)\sqrt{x}$;

5) $y = \sqrt{x}\sin x$;

6) $y = 2^x \cos x$;

7) $y = (2x - 1)^6$;

8) $y = \sqrt{x^3 - 3x}$;

9) $y = \log_3(2x^2 - 3x + 1)$;

10) $y = 14^{2-5x}$;

11) $y = x^3 + \ln(6x - 1)$;

12) $y = \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^5}$.

28.374. Вычислите значение производной данной функции в точке x_0:

1) $f(x) = \dfrac{3x^2}{1 - x}$, $x_0 = -1$;

2) $f(x) = \sqrt{5x^2 - 2x}$, $x_0 = 2$;

3) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\cos x$, $x_0 = 0$;

4) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{4 - \sin x}$, $x_0 = 0$;

5) $f(x) = \cos 2x - \sin\dfrac{\pi}{3}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

6) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x_0 = 1$;

7) $f(x) = e^{2x-1}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

28.375. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $s(t) = 3t^2 - 12t + 18$ (время t измеряется в секундах, перемещение s — в метрах). Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

28.376. Найдите угловой коэффициент касательной, проведённой к графику функции f в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $x_0 = -3$;

2) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

3) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

28.377. Составьте уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0:

1) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;

2) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = -2$;

3) $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{12}\right)$, $x_0 = \pi$;

4) $f(x) = (x - 1)\sqrt{2x + 1}$, $x_0 = 4$.

28.378. Прямые a и b, изображённые на рисунке 28.16, параллельны, причём прямая a является касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, а уравнение прямой b имеет вид $2x - y + 3 = 0$. Найдите $f'(x_0)$.

28.379. К графику функции $f(x) = 5 + 7x - 4x^2$ проведена касательная, угловой коэффициент которой равен –9. Найдите координаты точки касания.

28.380. Найдите координаты точек пересечения с осями координат касательных к графику функции $f(x) = \frac{x + 4}{x - 5}$, угловой коэффициент которых равен –1.

28.381. Найдите координаты точки параболы $y = x^2 - 3x + 2$, касательная в которой параллельна прямой $y = 6 - x$.

28.382. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x$, которая параллельна прямой $y = 5x - 8$.

28.383. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $f(x) = \sqrt{3x^2 - 8}$, которая параллельна прямой $y = 3x + 5$.

28.384. На рисунке 28.17 изображён график функции $y = f(x)$. Расположите в порядке возрастания числа $f'(-2)$, $f'(1)$ и $f'(2)$.

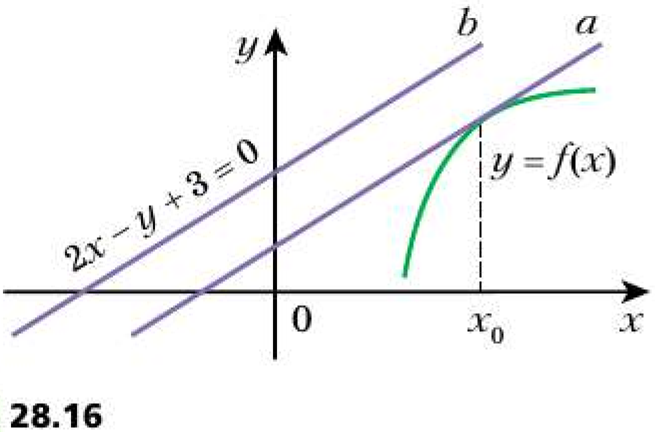


Рис. 28.16

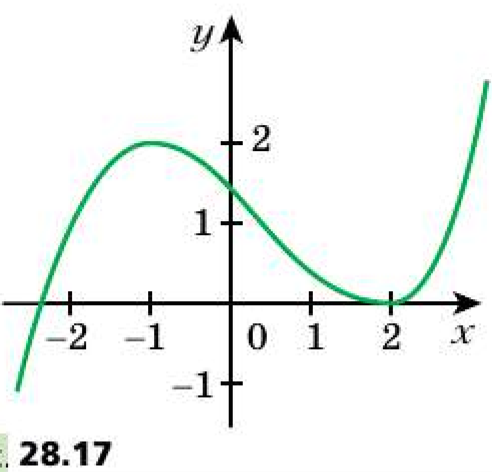


Рис. 28.17

28.385. Сколько критических точек на промежутке $[a; b]$ имеет функция, график которой изображён на рисунке 28.18?

28.386. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-8; 3]$ и имеет производную в каждой точке области определения. На рисунке 28.19 изображён график её производной $y = f'(x)$. Укажите:
1) промежутки возрастания и убывания функции $y = f(x)$;
2) точки минимума и точки максимума функции $y = f(x)$.

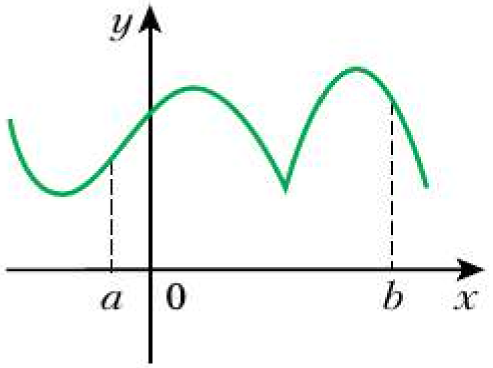


Рис. 28.18

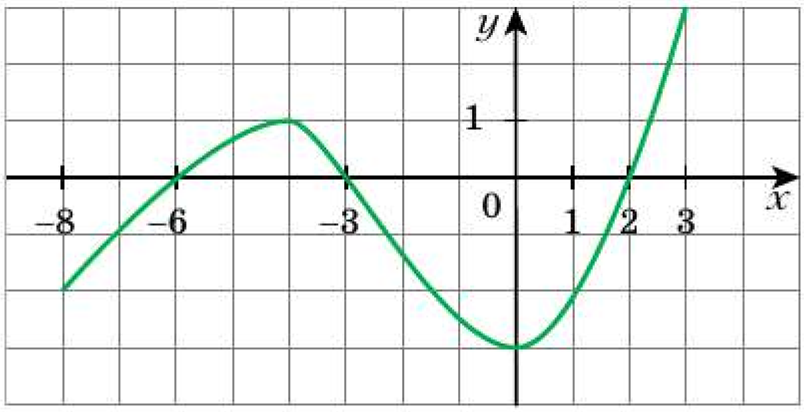


Рис. 28.19

28.387. Известно, что для функции f и для любого числа x из промежутка $[a; b]$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$. Сравните $f(a)$ и $f(b)$.

28.388. Докажите, что функция $f(x) = -2x^3 + 2x^2 - 10x + 80$ убывает на $\boldsymbol{R}$.

28.389. Докажите, что функция $f(x) = \cos 3x + 4x$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

28.390. Для всех $x \in D(f)$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. 1) Верно ли утверждение, что x_0 — точка минимума функции f? 2) Изменится ли ответ, если $D(f) = \boldsymbol{R}$?

28.391. Найдите промежутки возрастания и убывания и точки экстремума функции:

1) $f(x) = -8x^3 - x^2 + 2x$;
2) $f(x) = x^3 + 2x - 10$;
3) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 2$;
4) $f(x) = \dfrac{x}{4} + \dfrac{4}{x}$;
5) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$;
6) $f(x) = \dfrac{5 - 2x}{x^2 - 4}$;
7) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^3 + 8}$;
8) $f(x) = (1 - x)\, e^{-x}$;
9) $f(x) = \dfrac{x}{e} - e^x$;
10) $f(x) = x^2 - 8\ln x$;
11) $f(x) = \sqrt{x}\,(\ln x - 4)$;
12) $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{\sqrt{x}}$.

28.392. Найдите точки минимума и максимума функции:

1) $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 2x - \frac{\sin 2x}{4} - \frac{1 - \sqrt{3}x}{2}$;

2) $f(x) = 5\sin x + 12\cos x - 13x$.

28.393. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на промежутке $[-2; 0]$;

2) $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ на промежутке $[0; 4]$;

3) $f(x) = \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$;

4) $f(x) = \cos x - \sin x$ на промежутке $[0; 2\pi]$;

5) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$ на её области определения;

6) $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ на промежутке $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$.

28.394. Представьте число 15 в виде суммы двух таких неотрицательных чисел, чтобы произведение квадрата первого из них на второе было наибольшим.

28.395. Представьте число 20 в виде суммы двух таких неотрицательных чисел, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

28.396. Найдите отрицательное число, разность которого с третью его куба принимает наименьшее значение.

28.397. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в окружность радиуса 25 см?

28.398. Исследуйте функцию и постройте её график:

1) $f(x) = x^3 - 9x$;

2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

3) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$;

4) $f(x) = (x^2 - 2)^2$;

5) $f(x) = 4 + x^2 - \frac{1}{4}x^4$;

6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$;

7) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$;

8) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 2}$.

19. Интеграл и его применение

28.399. Найдите общий вид первообразных для функции:

1) $f(x) = x - \frac{2}{x^5}$ на промежутке $(-\infty; 0)$;

2) $f(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0; +\infty)$;

3) $f(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x} + \dfrac{3}{\sin^2 3x}$ на промежутке $\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}\right)$;

4) $f(x) = 2 + \dfrac{4}{x-1}$ на промежутке $(-\infty; 1)$;

5) $f(x) = e^{5x} - 7e^{-4x}$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$;

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+1}} - \cos\dfrac{x}{4}$ на промежутке $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

28.400. Для функции f найдите на указанном промежутке I первообразную F, график которой проходит через данную точку M:

1) $f(x) = 2x + 4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2; 1)$;

2) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 8)$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2} - 5\sin 5x$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(\pi; 0)$;

4) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-2x}}$, $I = \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$, $M(-4; 1)$;

5) $f(x) = 6x^2 + e^{\frac{x}{4}}$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(2; 4\sqrt{e})$;

6) $f(x) = (5x-3)^4$, $I = (-\infty; +\infty)$, $M(1; 1)$.

28.401. Тело движется прямолинейно со скоростью, которая в любой момент времени t определяется по закону $v(t) = t^2$. Определите закон движения тела, если за первые 3 с движения тело прошло путь 10 м.

28.402. Задайте формулой функцию f, график которой проходит через точку $A(4; 3)$, если угловой коэффициент касательной к графику этой функции в любой точке x из её области определения равен $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

28.403. Вычислите интеграл:

1) $\displaystyle\int_1^3 \frac{dx}{x^2}$;

2) $\displaystyle\int_0^{\pi} (6\cos 4x - 3\sin x)\,dx$;

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{18}} \frac{dx}{\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)}$;

4) $\displaystyle\int_{-2}^{1} (x^2 - 2x + 4)\,dx$;

5) $\displaystyle\int_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right)dx$;

6) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$;

7) $\displaystyle\int_0^2 (3x-2)^3\,dx$;

8) $\displaystyle\int_2^4 e^{-x}\,dx$;

9) $\displaystyle\int_0^5 \frac{dx}{4x+1}$.

28.404. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$;

2) $y = 2 - x^2$, $y = 0$;

3) $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 3$;

4) $y = e^{-x}$, $y = 1$, $x = -2$;

5) $y = -x^2 + 4$, $x + y = 4$;

6) $y = \dfrac{4}{x^2}$, $y = x - 1$, $x = 1$;

7) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$;

8) $y = 8 - x^2$, $y = 4$;

9) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$;

10) $y = \dfrac{5}{x}$, $y = 4x + 1$, $x = 2$.

28.405. Вычислите интеграл:

1) $\int\limits_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \sqrt{12 - x^2}\,dx$;

2) $\int\limits_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx$.

6 О случайных величинах

§ 29 Дискретные случайные величины и их распределения

Рассмотрим несколько примеров случайных величин.

На книжной полке учителя химии стоят школьные учебники химии с 8 по 11 класс. Наугад выбирают один учебник. Например, если выбран учебник для 9 класса, то случайная величина x равна 9.

Такая случайная величина x может принимать следующие значения:

$$8,\ 9,\ 10,\ 11. \tag{1}$$

Если на полке стоит по одному учебнику для каждого класса, то все четыре значения случайной величины x равновозможны. Поэтому её распределение вероятностей имеет вид:

Значение x	8	9	10	11
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Все числа, записанные во второй строке таблицы, равны. Такое распределение вероятностей называют **равномерным**.

Ещё один пример. Случайная величина y равна натуральному числу, выбранному некоторым случайным образом. Понятно, что величина y может принять одно из значений:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n,\ \ldots \tag{2}$$

Обратите внимание, что в обоих приведённых примерах все значения случайной величины записаны в виде последовательности чисел — конечной (1) или бесконечной (2). В таких случаях говорят, что рассматриваемая случайная величина является **дискретной**, или, точнее, что случайная величина имеет **дискретное распределение**.

Все случайные величины, рассмотренные в § 21–24 учебника, являются дискретными. Например, биномиальное распределение с параметрами n и p является дискретным, поскольку множество значений случайной величины с таким распределением конечно.

Соответствие между значениями дискретной случайной величины и вероятностями, с которыми она их принимает, как и ранее, называют **распределением вероятностей** случайной величины. Если таких значений бесконечное количество, то их записывают в «бесконечную таблицу»:

Значение случайной величины	x_1	x_2	x_3	x_4	...
Вероятность	p_1	p_2	p_3	p_4	...

По этой таблице, например, можно сказать, что случайная величина принимает значение x_2 с вероятностью, равной p_2.

Сумма неотрицательных чисел p_1, p_2, ..., стоящих во второй строке таблицы, **равна 1**. Обратите внимание, что тут речь идёт о сумме бесконечного количества слагаемых. Это означает, что конечные суммы $p_1 + p_2 + ... + p_n$ с ростом n неограниченно приближаются к 1.

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное множество значений, то её распределение вероятностей не может быть равномерным. Действительно, пусть все числа p_1, p_2, ... одинаковы и равны некоторому числу p. Тогда, если $p = 0$, то все суммы $p_1 + p_2 + ... + p_n$ будут нулевыми. Если же $p > 0$, то суммы $p_1 + p_2 + ... + p_n = np$ с ростом n будут возрастать и с некоторого момента превысят 1.

Приведём один важный пример случайной величины, имеющей дискретное распределение и принимающей бесконечное множество значений. Этот пример напоминает схему Бернулли, в которой элементарными исходами эксперимента были всевозможные последовательности определённой длины вида

«УННУН...У»,

где буквы «У» и «Н» указывают на результат в отдельных испытаниях Бернулли: «У» — успех, «Н» — неудача.

Рассмотрим опыт, результатами которого также являются конечные последовательности, состоящие из букв «У» — успех, «Н» — неудача. Однако, в отличие от схемы Бернулли, где все последовательности имели одинаковую длину, сейчас нас будут интересовать такие последовательности:

«У»,
«НУ»,
«ННУ»,
«НННУ»,
...

Этот бесконечный список состоит из всех конечных последовательностей с одной буквой «У», стоящей на последнем месте. Такие результаты опыта можно получить, если проводить серию из одинаковых испытаний Бернулли с исходами «У» и «Н» до первого успешного исхода, после которого серия прерывается[1].

В этом опыте рассмотрим случайную величину x, равную количеству букв в последовательности, являющейся элементарным исходом опыта. Например, если опыт закончился результатом «ННУ», то $x = 3$. Таким образом, величина x показывает, сколько попыток было сделано до первой удачной (включая удачную). Ясно, что случайная величина x принимает натуральные значения.

Если положить, что вероятность успешного исхода У в одном отдельном испытании равна $p > 0$, а неуспешного Н – $q = 1 - p$, то можно составить таблицу распределения вероятностей случайной величины x.

Элементарный исход	«У»	«НУ»	«ННУ»	«НННУ»	...
Значение x	1	2	3	4	...
Вероятность	p	qp	q^2p	q^3p	...

Вероятности, записанные в последней строке таблицы, образуют бесконечную геометрическую прогрессию

$$p,\ qp,\ q^2p,\ q^3p,\ \ldots$$

с первым членом $b_1 = p$ и знаменателем $q = 1 - p$.

Можно записать:

$$\boxed{\boldsymbol{P(x = k) = q^{k-1}p}}$$

Обратите внимание, что сумма членов этой бесконечной геометрической прогрессии равна 1. Действительно,

$$S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

Таким образом, приведённая выше таблица действительно задаёт распределение вероятностей случайной величины x. Говорят, что величина x имеет **геометрическое распределение вероятностей** с параметром p.

---

[1] Говоря о серии испытаний до первого успешного исхода, имеют в виду опыт, состоящий только из *конечных* серий испытаний. Если каждое отдельное испытание Бернулли заканчивается результатом Н, образуя бесконечную последовательность: ННН ... , то этот «результат» не засчитывают. Его вероятность разумно считать нулевой, и к нему можно относиться так же, как, например, при подбрасывании монеты относятся к результату «монета стала на ребро».

Для дискретных случайных величин, принимающих бесконечное множество значений, также можно определить математическое ожидание, дисперсию и другие характеристики. Например, математическое ожидание случайной величины x, имеющей геометрическое распределение с параметром p, показывает, сколько в среднем нужно ждать появления первого успешного исхода. Поскольку число p равно вероятности успешного исхода в одном отдельном испытании Бернулли, то математическое ожидание случайной величины x равно $\frac{1}{p}$. Доказать это утверждение и более подробно познакомиться с характеристиками дискретных случайных величин вы сможете, если продолжите изучать теорию вероятностей в вузе.

Пример. Игральный кубик подбрасывают до тех пор, пока не выпадет шестёрка. Найдите вероятность того, что первая шестёрка появится при четвёртом подбрасывании.

Решение. Пусть случайная величина x равна количеству бросков до появления первой шестёрки. Тогда искомая вероятность равна $P(x = 4)$. Случайная величина x имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{6}$. Поэтому

$$P(x = 4) = q^{4-1}p = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^3 \frac{1}{6} \approx 9{,}6\ \%.$$

Ответ: 9,6 %. ■

Упражнения

29.1. Монету подбрасывают 3 раза. Найдите вероятность того, что первый герб выпадет при третьем подбрасывании.

29.2. Два игральных кубика бросают одновременно 3 раза. Найдите вероятность того, что первый дубль выпадет на втором или третьем броске.

29.3. Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,9. Опыт состоит в том, что стрелок стреляет до тех пор, пока не попадёт в мишень. Найдите вероятность того, что ему придётся стрелять 5 раз.

29.4. Производитель одноразового защитного средства гарантирует защиту с вероятностью 99 %. Если таким средством пользоваться ежедневно (каждый раз новым), то какова вероятность обеспечить защиту в течение года?

29.5. Девушка каждый день гуляет по улицам большого города, чтобы найти парня своей мечты — высокого голубоглазого блондина атлетического сложения от 20 до 25 лет в белом костюме. Вероятность того, что в отдельно взятый день ей встретится молодой человек, удовлетворяющий этим требованиям, составляет 7 %. Сколько дней придётся потратить девушке, чтобы встретить такого человека с вероятностью 80 %?

29.6. Случайная величина x имеет геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{5}$. Найдите распределение вероятностей случайной величины $y = (-1)^x$.

29.7. Трое игроков по очереди бросают монету. Выиграет тот, у кого первым выпадет герб. Найти вероятность выигрыша второго игрока.

29.8. Новый телевизор может выйти из строя из-за перепадов напряжения в сети или неаккуратного обращения. Специалисты сервисного центра оценили вероятность того, что телевизор в первый раз после покупки выйдет из строя в период с четвёртого по шестой месяц включительно, в 2 %. Оцените вероятность того, что телевизор после покупки проработает без поломок больше двух лет.

29.9. Дима и Володя решают задачу «Среди натуральных чисел случайным образом выбрали два числа x и y. Найти вероятность того, что $x = y$».

Дима рассуждает так. Допустим, $x = 10$. Тогда равенство $x = y$ выполняется, только если $y = 10$. Поскольку число y выбиралось наугад среди бесконечного количества натуральных чисел, то вероятность того, что $y = 10$, равна 0. Это рассуждение верно и для любого другого значения x. Поэтому вероятность события $x = y$ равна 0.

Володя рассуждает иначе. Допустим, $x = 10$. Тогда неравенство $x > y$ выполняется, если y меньше 10. Поскольку число y выбиралось наугад среди бесконечного количества натуральных чисел, то вероятность того, что это число окажется меньшим 10, равна 0. Это рассуждение верно и для любого другого значения x. Поэтому вероятность события $x > y$ равна 0. Аналогично Володя доказывает, что и вероятность события $x < y$ тоже равна 0, и делает заключение, что тогда вероятность события $x = y$ равна 1.

Кто из ребят прав?

§ 30 Распределение Пуассона

В предыдущем параграфе вы ознакомились с геометрическим распределением. Случайная величина с таким распределением является дискретной и принимает бесконечное множество значений. В этом параграфе мы приведём ещё один важный пример дискретной случайной величины, принимающей бесконечное множество значений.

Рассмотрим следующую задачу. Современная установка (например, по производству компьютерных чипов) изготавливает детали, состоящие из нескольких миллионов элементов. Пусть вероятность того, что отдельный элемент детали окажется бракованным, равна $p = 0{,}000001$ — в среднем один бракованный элемент на каждый миллион. Поскольку число p достаточно маленькое, то едва ли стоит ожидать, что очередной элемент окажется бракованным. Однако если рассмотреть созданную деталь в целом, то среди её элементов вполне может найтись несколько бракованных[1]. Например, пусть x — случайная величина, равная количеству бракованных элементов в детали, состоящей из $n = 3$ млн элементов. В этом случае нас вряд ли сильно удивит, если значение величины x окажется равным, например, 4. Подсчитаем вероятность этого события.

Заметим, что случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 3\ 000\ 000$ и $p = 0{,}000001$. Поэтому $P(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. В частности, вероятность того, что $x = 4$, равна

$$C_n^4 p^4 (1-p)^{n-4}. \tag{1}$$

Попробуем вычислить это число, подсчитав каждый из его сомножителей. Имеем:

$$C_n^4 = \frac{3000000 \cdot 2999999 \cdot 2999998 \cdot 2999997}{4!},$$

$$p^4 = (0{,}000001)^4,$$

$$(1-p)^{n-4} = 0{,}999999^{2999996}.$$

Ясно, что потребуется значительная вычислительная работа, чтобы найти значения этих сомножителей.

С другой стороны, при решении практических задач часто вообще нет смысла находить точные значения подобных выражений. Одна из причин состоит в том, что число p — вероятность изготовить бракованную деталь — обычно известно лишь с некоторой, часто не очень большой, точностью. Поэтому в теории вероятностей пользуются специальными приближёнными формулами, позволяющими достаточно быстро находить приближённые значения выражений, подобных (1).

Например, для любого целого неотрицательного k можно доказать, что если число n неограниченно возрастает и $p = \frac{\lambda}{n}$, где λ — некоторое фиксированное число, то значения $P(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ неограниченно приближаются к числу $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

[1] Наличие небольшого количества неработоспособных элементов не делает всю деталь бракованной. Существуют механизмы, позволяющие обнаружить такие нерабочие области и не использовать их в дальнейшем.

С доказательством этого факта вы сможете ознакомиться, если продолжите изучать теорию вероятностей в вузе.

Опираясь на сформулированное утверждение, оценим вероятность (1). При $n = 3\,000\,000$ и $p = 0{,}000001$ имеем: $\lambda = np = 3$. Поэтому

$$P(x = 4) = C_n^4 p^4 (1 - p)^{n-4} \approx \frac{3^4}{4!} e^{-3} \approx 16{,}8\ \%.$$

Обратите внимание, что для вычисления приближённого значения этим методом можно вообще не знать значения вероятности p и количества испытаний n, достаточно лишь знать их произведение $\lambda = np$.

Определение

Говорят, что случайная величина y имеет распределение Пуассона с параметром λ, где λ — некоторое положительное число, если её множество значений состоит из целых неотрицательных чисел и

$$P(y = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Из определения следует, что распределение Пуассона является дискретным, а множество значений случайной величины с таким распределением состоит из целых неотрицательных чисел.

Пример 1. Оцените распределение количества бракованных элементов в детали, состоящей из $n = 3$ млн элементов, если вероятность того, что отдельный элемент детали окажется бракованным, равна $p = 0{,}000001$ (см. опыт, описанный в этом пункте).

Решение. Пусть случайная величина y равна количеству бракованных элементов детали. Положим $\lambda = np = 3$. Поскольку число n достаточно большое, то будем считать, что распределение вероятностей случайной величины y близко к распределению Пуассона с параметром $\lambda = np = 3$. Тогда получаем:

$$P(y = 0) \approx \frac{3^0}{0!} e^{-3} \approx 5{,}0\ \%,$$

$$P(y = 1) \approx \frac{3^1}{1!} e^{-3} \approx 14{,}9\ \%,$$

$$P(y = 2) \approx \frac{3^2}{2!} e^{-3} \approx 22{,}4\ \%,$$

$$P(y = 3) \approx \frac{3^3}{3!} e^{-3} \approx 22{,}4\ \%,$$

$$\ldots$$

Вообще, $P(y=k) \approx \frac{3^k}{k!}e^{-3}$ для всех $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким образом, можно составить таблицу распределения вероятностей количества бракованных элементов в детали.

Количество бракованных элементов	0	1	2	3	4	...
Вероятность, %	5,0	14,9	22,4	22,4	16,8	...

Выше было отмечено, что биномиальное распределение с параметрами n и $p = \frac{\lambda}{n}$ с ростом значений n приближается к распределению Пуассона с параметром λ, где λ — некоторое фиксированное число. Это позволяет биномиальное распределение приближённо заменять на пуассоновское. Обычно так поступают, если значение $\lambda = np$ относительно небольшое, не больше 10—20, и $p < 0{,}1$. При больших значениях λ используют уже другие приближения, с которыми вы ознакомитесь в следующих параграфах.

В практических задачах распределение Пуассона применяют тогда, когда нужно узнать, сколько раз произошло некое редкое событие (в нашем примере — брак в отдельном элементе детали) за определённый промежуток времени или в определённой области пространства (в нашем примере — во всей детали в целом). Поэтому распределение Пуассона иногда называют распределением редких событий. При этом параметр λ распределения Пуассона указывает, сколько раз в среднем произойдёт редкое событие за исследуемый промежуток времени или в изучаемой области пространства[1].

Например, распределение Пуассона хорошо описывает такие величины, как:

- количество опечаток на одной странице книги;
- количество изюминок в одной булочке;
- количество поступивших телефонных звонков на данный номер телефона за определённый промежуток времени;
- количество рыб, пойманных в большом озере с 7 до 8 утра;
- количество аварий на некотором участке дороги в неделю;
- количество мутаций в некоторой популяции растений или животных и т. д. При этом параметр λ указывает среднее (ожидаемое) значение количества опечаток на странице, количества изюминок в булочке и т. д.

[1] Можно доказать, что математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ, равно λ.

Попробуйте самостоятельно описать случайные величины, имеющие биномиальное распределение и стоящие «за кулисами» приведённых примеров практического применения распределения Пуассона.

Пример 2. Повар подготовил тесто для выпечки 40 булочек с изюмом. Найдите вероятность того, что в выбранной наугад булочке окажется ровно 7 изюминок, если повар добавил в тесто 0,36 кг изюма (считая, что каждая изюминка весит 1 г).

Решение. Пусть случайная величина x равна количеству изюминок в выбранной наугад булочке. На каждую булочку в среднем приходится $\frac{360}{40} = 9$ изюминок. Поэтому можно считать, что случайная величина x имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 9$. Получаем:

$$P(x = 7) = \frac{9^7}{7!}e^{-9} \approx 11{,}7\ \%. \blacksquare$$

Ответ: 11,7 %. ■

Упражнения

30.1. Квалифицированный наборщик текста делает опечатку (набирает неправильный символ) с вероятностью 0,025 %. Газетный разворот содержит 16 000 символов.

1) Запишите формулу для вычисления вероятности того, что наборщик сделает k опечаток на одном развороте.

2) Используя калькулятор или компьютер, вычислите приближённое значение вероятности количества опечаток для: *а*) $k = 0$; *б*) $k = 1$; *в*) $k = 4$; *г*) $k = 5$.

3) Воспользовавшись распределением Пуассона, для тех же значений k вычислите приближённые значения вероятностей количества опечаток и сравните полученные результаты.

4) Вычислите приближённое значение вероятности того, что наборщик сделает 10 опечаток на развороте.

30.2. Среди семян некоторой сельскохозяйственной культуры попадается 0,9 % семян сорняков. Найдите вероятность того, что из 500 семян этой культуры 4 окажутся семенами сорняков.

30.3. Оцените вероятность того, что из 1000 учащихся школы найдётся ровно 5 школьников, родившихся 1 сентября.

30.4. Случайная величина z имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 14{,}2$. Найдите, при каком значении k вероятность события $P(z = k)$ будет наибольшей.

30.5. Первые капли дождя оставляют на сухом асфальте школьной баскетбольной площадки тёмные точки-отметины. Найдите вероятность того, что в центральный круг радиуса 2 м попало 5 дождевых капель, если размер всей площадки 24×12 м и на неё упало 200 капель дождя. Решите задачу, воспользовавшись: 1) биномиальным распределением; 2) распределением Пуассона.

30.6. Карлсон нашёл в доме у Малыша большой кулёк конфет и принялся их есть, выбирая сначала только шоколадные. Когда количество шоколадных конфет сократилось до 8 % от оставшихся конфет, Карлсон со словами: «Эх... попадёшь к вам в дом, научишься есть всякую гадость» — съел ещё 50 конфет без разбору. Оцените вероятность того, что среди этих 50 конфет Карлсону попалось от 5 до 7 шоколадных включительно. Решите задачу, воспользовавшись: 1) биномиальным распределением; 2) распределением Пуассона.

30.7. В пятилитровую кастрюлю супа харчо бросили 40 горошин чёрного перца. Повар решил попробовать свой суп. С какой вероятностью ему в ложке объёмом 15 мл попадётся одна горошина перца?

30.8. Для оформления заказов клиенты звонят менеджеру по продажам в среднем каждые 10 мин. Найдите вероятность того, что в течение часа менеджеру по продажам нужно будет оформить заказы по телефону 9 клиентам.

30.9. На аварийно опасном участке дороги в среднем раз в три дня случается дорожно-транспортное происшествие. Найдите вероятность того, что в течение недели на этом участке дороги будет зарегистрировано не менее 3 аварий.

§ 31 Независимые случайные величины

Изучая теорию вероятностей, вы ознакомились с понятием «независимые случайные события». Например, если подбросить красный и синий игральные кубики, то события

$$A_k = \{\text{на красном кубике выпало число } k\}$$

и

$$B_m = \{\text{на синем кубике выпало число } m\}$$

являются независимыми при любых значениях k и m, где k и m — натуральные числа от 1 до 6. Этот факт согласуется с нашей интуицией. Поскольку кубики были подброшены независимо, то информация о том, что на красном кубике выпало, например, число k, равное 5, не меняет вероятность выпадения числа $m = 3$ на синем кубике. Другими словами, если случайная величина x равна числу на красном кубике, а случайная величина y — числу на синем кубике, то случайные события $\{x = k\}$ и $\{y = m\}$ являются независимыми при любых значениях k и m.

Определение

Если в некотором испытании изучают дискретные случайные величины x и y, причём случайные события $\{x = k\}$ и $\{y = m\}$ являются независимыми при любых значениях k и m, то случайные величины x и y называют независимыми.

Если случайные величины x и y являются независимыми, то при любых значениях k и m выполняется равенство

$$\boldsymbol{P(x = k \text{ и } y = m) = P(x = k) \cdot P(y = m)}$$

Действительно, поскольку события

$A_k = \{$величина x равна $k\}$ и $B_m = \{$величина y равна $m\}$

являются независимыми, то

$$P(x = k \text{ и } y = m) = P(A_k \cap B_m) = P(A_k) \cdot P(B_m) = P(x = k) \cdot P(y = m).$$

Если числа k и m пробегают всевозможные значения из множеств значений случайных величин x и y соответственно, то образуется набор чисел $P(x = k \text{ и } y = m)$. Такое соответствие между значениями дискретных случайных величин и вероятностями, с которыми они их принимают, называют **совместным распределением вероятностей** случайных величин.

Пример 1. В очередном туре футбольного турнира Лиги чемпионов играют две российские команды: санкт-петербургский «Зенит» против испанской «Валенсии» и московский ЦСКА против немецкого «Вольфсбурга». Случайная величина x равна количеству очков, которые наберёт в предстоящем матче «Зенит», а y — количеству очков, которые наберёт ЦСКА. Футбольный болельщик считает, что результаты этих матчей не зависят друг от друга и величины x и y имеют следующие распределения:

Значение x	3	1	0
Вероятность, %	50	10	40

Значение y	3	1	0
Вероятность, %	30	60	10

Основываясь на оценках болельщика, найдите вероятность того, что команды «Зенит» и ЦСКА суммарно наберут: 1) 2 очка; 2) 4 очка.

Решение. 1) Рассмотрим случайную величину $z = x + y$. Найдём, с какой вероятностью случайная величина $z = x + y$ принимает значение, равное 2.

Если $x + y = 2$, то оба матча завершились вничью, т. е. $x = 1$ и $y = 1$.

По условию задачи случайные величины x и y независимы. Поэтому

$$P(z = 2) = P(x = 1 \text{ и } y = 1) = P(x = 1) \cdot P(y = 1) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06.$$

2) Найдём, с какой вероятностью случайная величина $z = x + y$ принимает значение, равное 4.

Если $x + y = 4$, то возможны два варианта:

событие $\{A\colon x = 3 \text{ и } y = 1\}$,

событие $\{B\colon x = 1 \text{ и } y = 3\}$.

По условию задачи случайные величины x и y независимы. Поэтому

$$P(A) = P(x = 3 \text{ и } y = 1) = P(x = 3) \cdot P(y = 1) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}3;$$

$$P(B) = P(x = 1 \text{ и } y = 3) = P(x = 1) \cdot P(y = 3) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03.$$

Поскольку события A и B несовместны, то

$$P(z = 4) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}03 = 0{,}33.$$

Ответ: 1) 6 %; 2) 33 %. ■

Если в определении независимых случайных величин говорить не о двух, а об n случайных величинах $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то получим определение n независимых дискретных случайных величин.

Для независимых случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и произвольных чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$ выполняется равенство

$$\boxed{\boldsymbol{P(x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n) = P(x_1 = k_1) \cdot \ldots \cdot P(x_n = k_n)}}$$

Пример 2. Случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p. Найдите распределение случайной величины $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Решение. Ясно, что случайная величина y принимает целые значения от 0 до n. Пусть k — некоторое целое число от 0 до n. Найдём вероятность события $y = k$.

Поскольку каждая из случайных величин x_i равна 1 или 0, то $y = k$, если, например, $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 1$, а $x_{k+1} = x_{k+2} = \ldots = x_n = 0$. Каждая из случайных величин x_i принимает значение 1 с вероятностью p, а значение 0 с вероятностью $(1 - p)$, и свои значения эти случайные величины принимают независимо друг от друга. Поэтому

$$P(x_1 = \ldots = x_k = 1 \text{ и } x_{k+1} = \ldots = x_n = 0) = p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Ясно, что существует C_n^k вариантов того, какие k случайных величин из n данных случайных величин x_i примут значение, равное 1. Поэтому

$$P(y = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}.$$

Это означает, что случайная величина y имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. ■

Упражнения

31.1. Туристическая фирма проводит акцию «Выбери цену сам!». Клиенту, планирующему купить путёвку, предлагается независимо вытянуть два билета: первый — с величиной ежедневной скидки за путёвку, второй — с количеством дней, в течение которых будет действовать эта скидка. Распределения вероятностей этих величин представлены в следующих таблицах.

Величина ежедневной скидки, р.	400	2000	4000
Вероятность, %	70	25	5

Количество дней действия скидки	1	2	5	10
Вероятность, %	40	30	20	10

Найдите вероятность того, что туристическая фирма предоставит клиенту скидку на общую сумму 4000 р.

31.2. Случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимы и имеют распределение Бернулли с параметром p. Найдите распределение случайной величины $y = x_1 x_2 \ldots x_n$.

31.3. Случайные величины x и y являются независимыми. Верно ли, что случайные величины x^3 и y^3 также являются независимыми?

31.4. В некотором опыте наблюдают две независимые случайные величины x и y, имеющие биномиальное распределение, x — с параметрами n и p, а y — с параметрами m и p. Найдите распределение случайной величины $x + y$.

31.5. Имеется 11 коробок с белыми и чёрными шарами. В первых десяти коробках лежит по одному белому и чёрному шару, а в одиннадцатой — два белых и один чёрный шар. Из каждой коробки наугад берут по одному шару. Случайная величина x равна количеству вытянутых белых шаров. Найдите распределение случайной величины x.

31.6. В некотором опыте наблюдают две независимые случайные величины x и y, имеющие геометрические распределения. Докажите, что случайная величина $\min(x, y)$ также имеет геометрическое распределение.

31.7. В некотором опыте наблюдают две независимые одинаково распределённые случайные величины x и y, принимающие конечное множество значений. Докажите, что для случайной величины $z = x - y$ и произвольного числа d выполняется равенство $P(z = d) = P(z = -d)$.

§ 32 Математическое ожидание произведения и дисперсия суммы независимых случайных величин

Изучая свойства математического ожидания, вы узнали, что имеет место равенство $M(cx) = cM(x)$, которое позволяет найти математическое ожидание произведения константы c и случайной величины x. А как найти математическое ожидание произведения двух случайных величин? В случае независимых случайных величин ответить на этот вопрос позволяет следующая теорема.

Теорема 32.1

Если $M(x)$ и $M(y)$ — математические ожидания независимых случайных величин x и y, то имеет место равенство

$$M(xy) = M(x)M(y).$$

Доказательство теоремы проведём для частного случая, когда множества значений случайных величин x и y состоят из двух чисел. В общем случае рассуждения будут аналогичными.

Пусть распределения вероятностей случайных величин x и y имеют вид:

Значение x	x_1	x_2
Вероятность	p_1	p_2

Значение y	y_1	y_2
Вероятность	q_1	q_2

Рассмотрим случайную величину $z = xy$. Множество её значений состоит из чисел $z_1 = x_1y_1$, $z_2 = x_2y_1$, $z_3 = x_1y_2$, $z_4 = x_2y_2$.

Рассмотрим сначала такие исходы опыта, при которых $y = y_1$. В этом случае случайная величина $z = xy$ может принять два значения: $z_1 = x_1y_1$ и $z_2 = x_2y_1$ с вероятностями $P(x = x_1$ и $y = y_1)$ и $P(x = x_2$ и $y = y_1)$ соответственно. Поскольку случайные величины x и y являются независимыми, то

$$P(x = x_1 \text{ и } y = y_1) = P(x = x_1)P(y = y_1) = p_1q_1.$$

Аналогично $P(x = x_2 \text{ и } y = y_1) = p_2q_1$.

Поэтому при сделанных предположениях выполняется равенство

$$z_1P(z = z_1) + z_2P(z = z_2) = x_1y_1p_1q_1 + x_2y_1p_2q_1 = \\ = y_1q_1(x_1p_1 + x_2p_2) = y_1q_1M(x),$$

т. е.

$$z_1P(z = z_1) + z_2P(z = z_2) = y_1q_1M(x). \quad (1)$$

Подчеркнём, что здесь $P(z = z_1)$ равно вероятности события, состоящего в том, что $z = z_1$ и $y = y_1$. Аналогичное замечание касается и $P(z = z_2)$.

Рассмотрев исходы опыта, при которых $y = y_2$, установим аналогичное равенство:

$$z_3P(z = z_3) + z_4P(z = z_4) = y_2q_2M(x). \quad (2)$$

Если сложить равенства (1) и (2), то в левой части получим $M(z)$. Поэтому

$$M(z) = y_1q_1M(x) + y_2q_2M(x) = M(x)(y_1q_1 + y_2q_2) = M(x)M(y),$$

что и требовалось доказать. ■

Вы знаете, что математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий. Оказывается, если случайные величины независимы, то аналогичным свойством обладает и дисперсия.

Теорема 32.2

Если $D(x)$ и $D(y)$ — дисперсии независимых случайных величин x и y, то

$$D(x + y) = D(x) + D(y).$$

Доказательство

По ключевой задаче 2 § 24 учебника имеет место равенство

$$D(x + y) = M(x + y)^2 - (M(x + y))^2. \quad (3)$$

Раскроем скобки в каждом из слагаемых правой части и упростим полученные выражения.

$$M(x + y)^2 = M(x^2 + 2xy + y^2) = M(x^2) + 2M(xy) + M(y^2).$$

Поскольку случайные величины x и y являются независимыми, то $M(xy) = M(x)M(y)$. Поэтому

$$M(x + y)^2 = M(x^2) + 2M(x)M(y) + M(y^2).$$

Теперь рассмотрим слагаемое $(M(x+y))^2$. Получаем:

$$(M(x+y))^2 = (M(x)+M(y))^2 = (M(x))^2 + 2M(x)M(y) + (M(y))^2.$$

Подставляя найденные значения в (3), получаем:

$$D(x+y) = (M(x^2) + 2M(x)M(y) + M(y^2)) -$$
$$- ((M(x))^2 + 2M(x)M(y) + (M(y))^2) =$$
$$= (M(x^2) - (M(x))^2) + (M(y^2) - (M(y))^2) = D(x) + D(y).$$ ■

Аналогичное утверждение имеет место и для n случайных величин. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые случайные величины и $D(x_i)$ — дисперсия величины x_i, то

$$D(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = D(x_1) + D(x_2) + \ldots + D(x_n). \qquad (4)$$

Пример. Монету подбрасывают 100 раз и подсчитывают частоту появления герба. Найдите математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

Решение. Пусть случайная величина x_i равна 1, если на i-м броске выпал герб, и 0 в противном случае. Тогда $M(x_i) = \frac{1}{2}$ и $D(x_i) = \frac{1}{4}$.

Рассмотрим случайную величину $y = x_1 + \ldots + x_{100}$, равную количеству гербов, выпавших за все 100 бросков. Можно записать

$$M(y) = M(x_1) + \ldots + M(x_{100}) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50.$$

Поскольку броски монеты проводились независимо один от другого, то случайные величины x_i также являются независимыми. Используя формулу (4), получаем:

$$D(y) = D(x_1) + \ldots + D(x_{100}) = 100 \cdot \frac{1}{4} = 25.$$

Частота выпадения герба за 100 бросков равна $\frac{y}{100}$. Поэтому

$$M\left(\frac{y}{100}\right) = \frac{M(y)}{100} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}, \quad D\left(\frac{y}{100}\right) = \frac{D(y)}{100^2} = \frac{25}{100^2} = \frac{1}{400}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{400}$. ■

При решении последней задачи мы установили, что ожидаемое значение частоты появления герба в серии из 100 подбрасываний равно $\frac{1}{2}$, т. е. вероятности выпадения герба в отдельном броске. Также обратите внимание, что полученное значение $D = \frac{1}{400}$ дисперсии достаточно маленькое — в 100 раз меньше, чем значение дисперсии при одном подбрасывании. Это означает, что в серии из 100 подбрасываний монеты следует ожидать лишь небольшие отклонения частоты появления герба от $\frac{1}{2}$.

Упражнения

32.1. О независимых случайных величинах x и y известно, что $M(x) = 5$, $M(y) = -2$. Найдите математическое ожидание случайной величины:
1) xy; 2) $(2 + x)(1 - 3y)$.

32.2. О независимых случайных величинах x и y известно, что $\sigma(x) = 4$, $\sigma(y) = 9$. Найдите стандартное отклонение случайной величины:
1) $x + y$; 2) $5y - 2x$.

32.3. В теореме 32.2 доказано, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме дисперсий. Верно ли, что дисперсия разности независимых случайных величин равна разности дисперсий?

32.4. Случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами n и p. Докажите, что $D(x) = np(1 - p)$.

32.5. Вероятность события A в некотором испытании равна p. Проводят серию из n таких испытаний и подсчитывают частоту $x_n = \frac{n_A}{n}$ события A, где n_A — число испытаний в этой серии, в которых произошло событие A. Докажите, что $M(x_n) = p$ и $D(x_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

32.6. Игральный кубик подбрасывают n раз и подсчитывают количество выпавших при этом шестёрок. Найдите стандартное отклонение этой случайной величины.

32.7. В настольной игре каждый ход фишку передвигают на несколько клеток вперёд. Это число определяют так: бросают два игральных кубика и подсчитывают произведение выпавших на кубиках чисел. Найдите математическое ожидание числа клеток, на которое передвинут фишку за 10 ходов.

32.8. Случайные величины x и y являются независимыми. Докажите, что $D(xy) \geqslant D(x)D(y)$.

§ 33 Закон больших чисел

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна 50 %. Означает ли это, что из 100 таких испытаний в 50 гарантированно произойдёт событие A? Конечно нет. Нас не должно удивлять, если в конкретной серии из 100 испытаний событие, вероятность которого равна 50 %, произойдёт, например, 48 раз или 56 раз. Такое отношение к полученным результатам основано на том, что в серии из 100 испытаний частота события A, равная 0,48 или 0,56, не очень сильно отличается от вероятности события A.

С другой стороны, не исключена возможность того, что из 100 испытаний событие A, вероятность которого равна 50 %, на самом деле произойдёт, скажем, 95 раз или, наоборот, произойдёт всего лишь 5 раз. Однако такие результаты могут вызвать удивление, поскольку частота, равная 0,95 или 0,05, значительно отличается от вероятности события A.

При решении примера § 32 мы показали, что дисперсия частоты события A при 100 испытаниях достаточно маленькая, т. е. в среднем отклонения частоты от числа 0,5 должны быть небольшими. Это согласуется с нашим опытом — при большом количестве испытаний частота события A примерно равна вероятности события A. В теории вероятностей доказана теорема, которая подтверждает этот вывод. Такую теорему относят к циклу теорем о **законе больших чисел**.

Упрощённый смысл закона больших чисел состоит в том, что если в отдельном испытании случайные факторы оказывают значительное влияние на результат испытания, то при многократном повторении одного и того же испытания эти случайные факторы взаимно компенсируются и их влияние на результат в среднем уменьшается.

Например, если при одном ударе по мячу случайные факторы (порыв ветра, неровность футбольного поля и т. д.) привели к тому, что мяч не попал в ворота, то при другом ударе эти же факторы могут привести к голу.

Прежде чем сформулировать упомянутую теорему, приведём несколько примеров.

Пусть в некотором опыте вероятность события A равна p. Проведём серию из n таких испытаний. Вы знаете, что такую серию испытаний называют схемой Бернулли с параметрами n и p. Обозначим через x_n случайную величину, равную частоте события A в этой серии. Вероятность того, что $x_n = \frac{m}{n}$, равна $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, где $m \in \mathbf{Z}$ и $0 \leqslant m \leqslant n$.

Например, на рисунке 33.1 в виде гистограммы представлены эти значения для случая $n = 10$ и $p = 40$ % (здесь и ниже вероятности подсчитаны с точностью до 0,1 %).

По этим данным можно оценить вероятность попадания величины x_{10} в тот или иной промежуток. Например, рассмотрим промежуток [0,3; 0,5], содержащий значение вероятности события A. Тогда вероятность того, что частота x_{10} удовлетворяет неравенству $0{,}3 \leqslant x_{10} \leqslant 0{,}5$, равна

$$P(0{,}3 \leqslant x_{10} \leqslant 0{,}5) \approx 21{,}5 + 25{,}1 + 20{,}1 = 66{,}7\ \%.$$

Увеличим число испытаний n до 20 и построим гистограмму распределения вероятностей частоты (рис. 33.2).

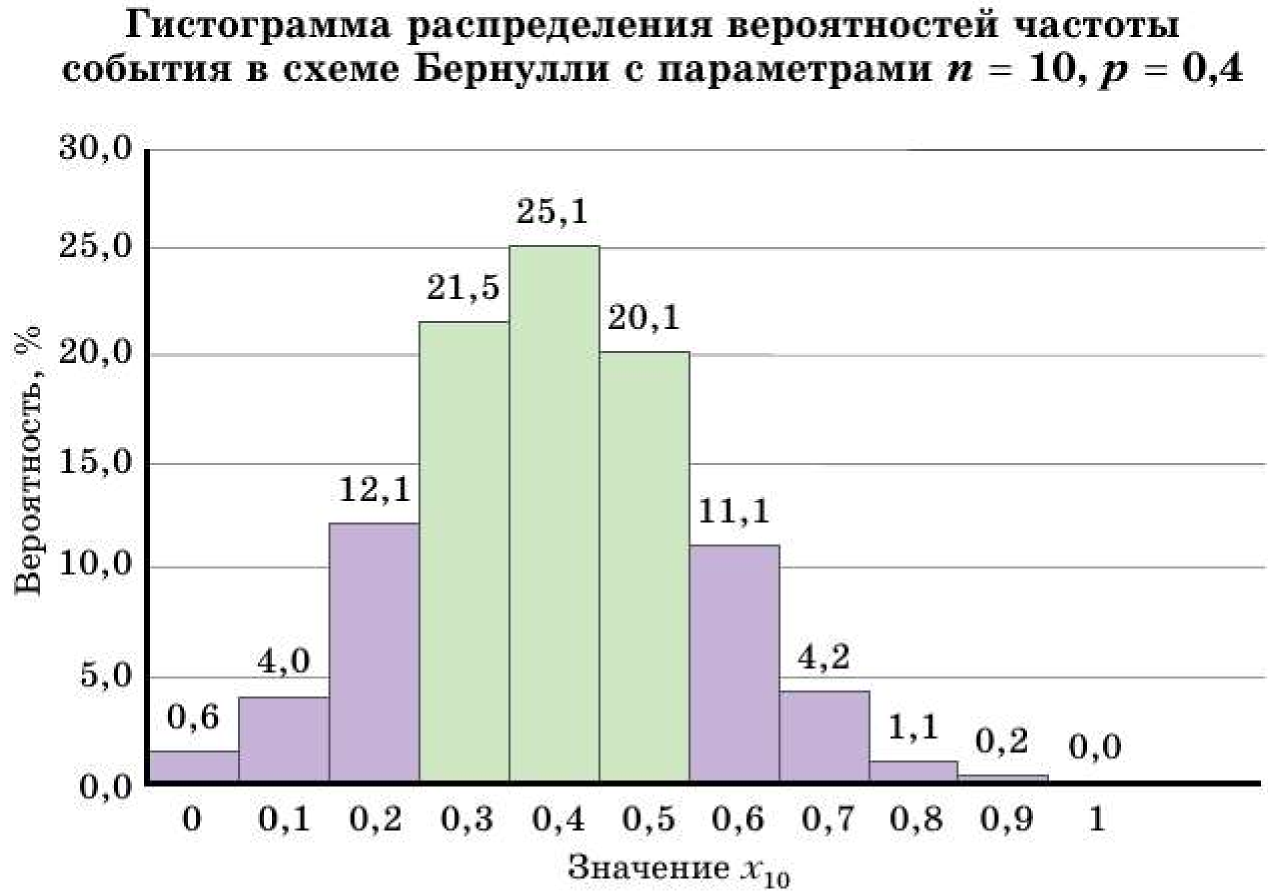


Рис. **33.1**

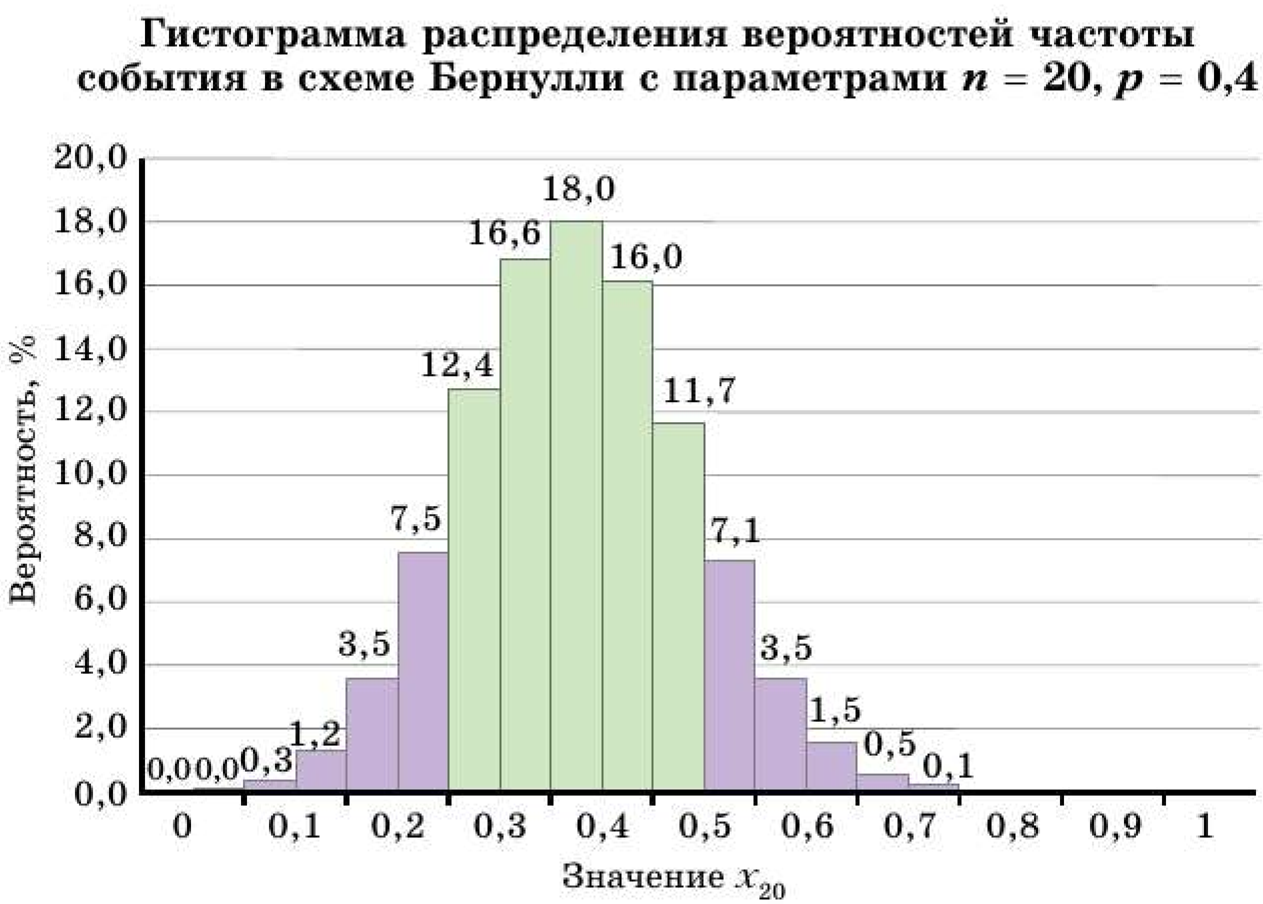


Рис. **33.2**

В этом случае вероятность того, что частота x_{20} удовлетворяет неравенству $0,3 \leqslant x_{20} \leqslant 0,5$, будет равна

$$P(0,3 \leqslant x_{20} \leqslant 0,5) \approx 12,4 + 16,6 + 18,0 + 16,0 + 11,7 = 74,7\ \%.$$

Обратите внимание, что с ростом количества испытаний от $n = 10$ до $n = 20$ значение вероятности увеличилось с 66,7 до 74,7 %.

Если увеличить количество испытаний, например, до $n = 100$ (рис. 33.3), то вероятность того, что частота попадёт между числами 0,3 и 0,5, увеличится ещё значительнее и окажется равной приблизительно 96,8 %.

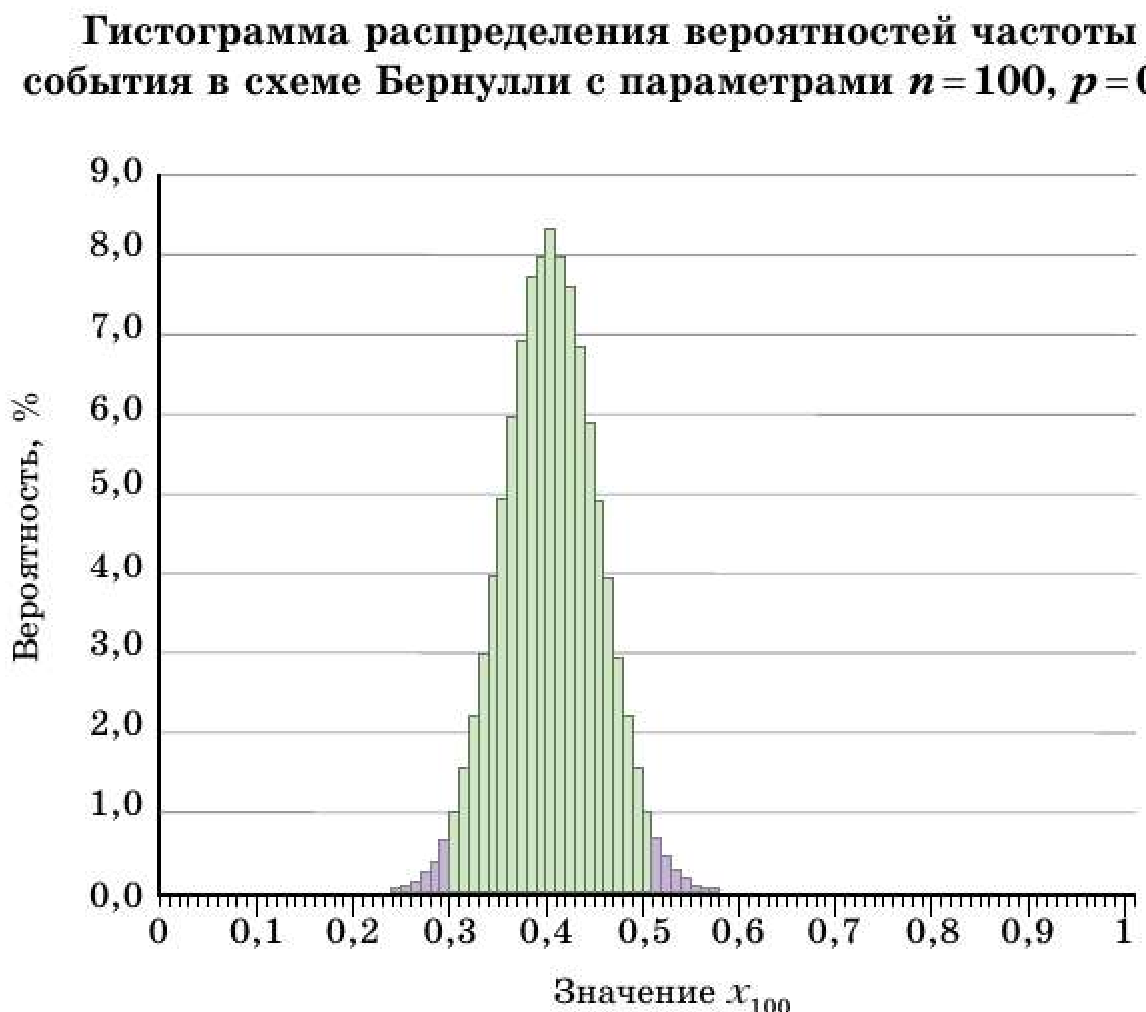


Рис. **33.3**

При дальнейшем увеличении количества испытаний n вероятность того, что частота попадёт между числами 0,3 и 0,5, будет неограниченно приближаться к значению 1. Это свойство в общем виде выражает одна из теорем, относящаяся к серии теорем о законе больших чисел.

Теорема 33.1

(теорема Бернулли)

Пусть событие A имеет вероятность p. Обозначим через x_n случайную величину, равную частоте события A в серии из n испытаний Бернул-

ли. Тогда для любого числа $\delta > 0$ вероятность того, что выполняется двойное неравенство $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$, с ростом числа испытаний n неограниченно приближается к 1.

С доказательством этой теоремы вы сможете ознакомиться в следующем параграфе.

Упражнения

33.1. Монету подбрасывают n раз. Можно ли гарантировать, что частота выпадения герба неограниченно приближается к числу 0,5 с ростом числа испытаний n?

33.2. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли гарантировать, что при некотором достаточно большом значении n будет верно неравенство $0{,}1 \leqslant x_n \leqslant 0{,}9$?

33.3. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $x_n = \frac{1}{2}$ неограниченно приближается к 1 с ростом числа испытаний n?

33.4. Монету подбросили бесконечное количество раз и на каждом шаге подсчитывали частоту x_n выпадения герба. Оказалось, что с ростом числа n значения x_n неограниченно приближаются к $\frac{1}{2}$. Можно ли гарантировать, что среди чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ число $\frac{1}{2}$ встречается чаще других?

33.5. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $x_n = 0{,}2$ неограниченно приближается к 0 с ростом числа испытаний n?

33.6. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $0{,}49 \leqslant x_n \leqslant 0{,}51$ равна 1 при некотором достаточно большом значении n?

33.7. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $0{,}49 \leqslant x_n \leqslant 0{,}4999$ неограниченно приближается к 0 с ростом числа испытаний n?

33.8. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $x_n > 0{,}5001$ неограниченно приближается к 0 с ростом числа испытаний n?

33.9. Монету подбрасывают бесконечное количество раз и на каждом шаге подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Оказалось, что за первые 1000 подбрасываний герб не выпал ни разу. Можно ли утверждать, что вероятность события $x_n > 0{,}4999$ неограниченно приближается к 1 с ростом числа подбрасываний?

33.10. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $x_n > \frac{1}{2}$ равна $\frac{1}{2}$?

33.11. Монету подбрасывают n раз и подсчитывают частоту x_n выпадения герба. Можно ли утверждать, что вероятность события $x_n = \frac{1}{2}$ неограниченно приближается к 0 с ростом числа испытаний n?

§ 34 Неравенство Чебышёва

Пусть x — некоторая случайная величина, $\mu = M(x)$ — её математическое ожидание. Мы неоднократно говорили, что число μ показывает некое среднее ожидаемое значение случайной величины x. Конечно, проведя эксперимент, мы можем получить значение величины x как больше, так и меньше μ. Более того, расстояние от полученного значения случайной величины x до числа μ может оказаться довольно значительным.

В теории вероятностей существует замечательная теорема, позволяющая оценить шансы того, что случайная величина примет значение, значительно отстоящее от её математического ожидания. Эта теорема была доказана великим русским математиком П. Л. Чебышёвым и названа в его честь (см. рассказ «Русский Архимед» на с. 77).

Теорема 34.1

(неравенство Чебышёва)

Пусть случайная величина x имеет математическое ожидание μ и дисперсию D. Тогда для любого положительного числа δ выполняется неравенство

$$P(|x-\mu| > \delta) \leqslant \frac{D}{\delta^2}. \qquad (1)$$

Поясним содержание этой теоремы. Неравенство $|x-\mu| > \delta$ означает, что случайная величина x принимает значение, отстоящее от числа μ на расстояние большее, чем δ. На рисунке 34.1 части прямой, на которых может находиться такое значение случайной величины x, окрашены в красный цвет. Если число δ большое, то это означает, что значение случайной величины x значительно отличается от математического ожидания μ. В этом случае неравенство (1) означает, что шансы такого события невелики, ведь число $\frac{D}{\delta^2}$ будет маленьким. Таким образом, неравенство Чебышёва утверждает: вероятность того, что в результате испытания случайная величина x примет значение, значительно отличающееся от её математического ожидания, мала.

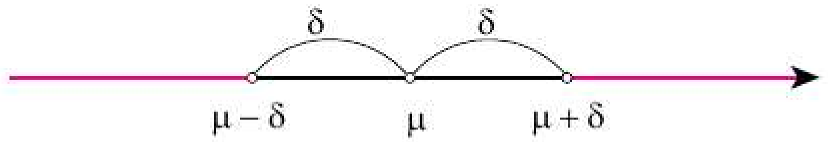


Рис. **34.1**

Докажем неравенство Чебышёва для случайной величины, принимающей конечное множество значений.

Будем исходить из определения дисперсии случайной величины x

$$D = M(x - \mu)^2 = (x_1 - \mu)^2 p_1 + \ldots + (x_n - \mu)^2 p_n, \qquad (2)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — значения случайной величины x, а $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — соответствующие вероятности.

В правой части равенства (2) записана сумма неотрицательных слагаемых вида $(x_i - \mu)^2 p_i$. Если из этой суммы выбросить все слагаемые, у которых $|x_i - \mu| \leqslant \delta$, то значение суммы не увеличится. У всех оставшихся слагаемых $|x_i - \mu| > \delta$, а значит, $(x_i - \mu)^2 \geqslant \delta^2$. Поэтому, если множители $(x_i - \mu)^2$ поменять на δ^2, то значение суммы тем более не увеличится. В результате этих действий получим неравенство

$$D \geqslant \delta^2(p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}),$$

где в скобках записана сумма всех вероятностей p_i соответствующих x_i, для которых $|x_i - \mu| > \delta$. Это означает, что в скобках записана вероятность события $|x - \mu| > \delta$. Таким образом, доказаны неравенства

$$D \geqslant \delta^2 P(|x - \mu| > \delta),$$

$$P(|x - \mu| > \delta) \leqslant \frac{D}{\delta^2}. \blacksquare$$

Опираясь на неравенство Чебышёва, можно обосновать теорему Бернулли, сформулированную в конце предыдущего параграфа.

Действительно, если вероятность события A равна p, а x_n — частота события A в серии из n независимых испытаний, то из ключевой задачи 32.5 следует, что

$$\mu = M(x_n) = p, \;\; D = D(x_n) = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Применяя неравенство Чебышёва, получаем:

$$P(|x_n - p| > \delta) \leqslant \frac{p(1-p)}{\delta^2 n}.$$

С ростом n величина $\frac{p(1-p)}{\delta^2 n}$ становится всё меньше и меньше, неограниченно приближаясь к нулю. Это означает, что неограниченно приближается к нулю вероятность того, что выполняется неравенство $|x_n - p| > \delta$. Противоположным $|x_n - p| > \delta$ является неравенство $|x_n - p| \leqslant \delta$, которое можно переписать в виде $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$. Поэтому вероятность того, что выполняется двойное неравенство $p - \delta \leqslant x_n \leqslant p + \delta$, с ростом n неограниченно приближается к 1.

Упражнения

34.1. Пусть случайная величина x имеет математическое ожидание μ и дисперсию D. Докажите, что для любого положительного числа δ выполняется неравенство $P(|x - \mu| \leqslant \delta) \geqslant 1 - \frac{D}{\delta^2}$.

34.2. (*Правило трёх сигм.*) Пусть случайная величина x имеет математическое ожидание μ и стандартное отклонение σ. Докажите, что с вероятностью, не меньшей 88 %, случайная величина x принимает значения, удовлетворяющие двойному неравенству $\mu - 3\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 3\sigma$.

34.3. Администрация школы планирует разбирать на педсовете поведение ученика, который часто опаздывает на первый урок. Известно, что $M(x) = 2$ мин и $\sigma(x) = 0{,}5$ мин, где x — время опоздания ученика (если ученик приходит вовремя, то $x = 0$).

1) Поддержите администрацию школы, доказав, что ученик в среднем опаздывает по крайней мере 15 раз из 16.

2) Поддержите ученика, доказав, что он практически никогда не опаздывает больше, чем на 5 минут, — не чаще, чем 4 раза в год (в учебном году 170 учебных дней).

34.4. Баскетболист совершает 30 независимых друг от друга штрафных бросков в корзину. Вероятность попасть в корзину в каждом броске составляет 90 %.

1) Используя неравенство Чебышёва, докажите, что вероятность того, что из 30 бросков баскетболист забросит мяч по крайней мере 25 раз, не меньше 70 %.

2) Используя биномиальное распределение, найдите вероятность того, что из 30 бросков баскетболист забросит мяч по крайней мере 25 раз.

34.5. Докажите, что если монету подбросить 2500 раз, то с вероятностью, не меньшей 99 %, частота выпадения герба отличается от $\frac{1}{2}$ не больше, чем на 0,1.

34.6. (*Неравенство Маркова.*) Пусть случайная величина x имеет математическое ожидание μ и принимает только неотрицательные значения. Докажите, что для любого положительного числа δ выполняется неравенство $P(x \geqslant \delta) \leqslant \frac{\mu}{\delta}$.

34.7. В каждом доме в среднем хранится 50 книг. Докажите, что вероятность попасть в дом, где больше 1000 книг, не превосходит 5 %.

34.8. Сумма денежных средств на счетах клиентов в некотором банке составляет 500 млн р. Вероятность того, что сумма денежных средств на случайно выбранном счёте меньше 50 тыс. р., составляет 80 %. Докажите, что в банке открыто не более 50 000 счетов.

34.9. (*Закон больших чисел.*) Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины, имеющие математическое ожидание μ и дисперсию D, случайная величина y — среднее арифметическое случайных величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, т. е. $y = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$. Тогда для любого положительного числа δ вероятность того, что выполняется двойное неравенство $\mu - \delta \leqslant y \leqslant \mu + \delta$, неограниченно приближается к 1 с ростом числа n. Докажите это утверждение.

§ 35 Ковариация случайных величин

В § 31 вы ознакомились с понятием независимости случайных величин. Понятно, что не все случайные величины являются независимыми. Приведём пример. Монету подбрасывают три раза. Пусть x — число гербов, которые выпали на монетах, а y — число гербов, которых выпали на монетах при первых двух подбрасываниях. Случайные величины x и y являются **зависимыми**, поскольку зависимыми являются, например, два события

$$\text{событие } \{A\colon x = 3\},$$
$$\text{событие } \{B\colon y = 2\}.$$

Действительно, несложно установить, что вероятность события B (при первых двух подбрасывания 2 раза выпал герб) равна $P(B) = \frac{1}{4}$. Если же предварительно сообщить, что произошло событие A (все 3 раза выпадал герб), то при таком условии вероятность события B уже будет равна $P_A(B) = 1$.

В теории вероятностей существует величина, характеризующая зависимость двух случайных величин.

Определение

Пусть $M(x)$ и $M(y)$ — математические ожидания случайных величин x и y. Ковариацией случайных величин x и y называют число $M((x - M(x))(y - M(y)))$, обозначают $\operatorname{cov}(x, y)$.

Оказывается, что *если ковариация случайных величин x и y не равна нулю, то они зависимые*. Это можно сказать и иначе: *если случайные величины x и y независимы, то их ковариация равна нулю*.

Действительно, если случайные величины x и y независимы, то $M(xy) = M(x)M(y)$. Поэтому

$$\operatorname{cov}(x, y) = M((x - M(x))(y - M(y))) =$$
$$= M(xy - xM(y) - yM(x) + M(x)M(y)) =$$
$$= M(xy) - M(xM(y)) - M(yM(x)) + M(M(x)M(y)) =$$
$$= M(x)M(y) - M(x)M(y) - M(x)M(y) + M(x)M(y) = 0.$$

Пример. Монету подбрасывают два раза. Пусть x — количество выпавших гербов, а y — разница между количеством выпавших гербов и чисел. Найдите ковариацию случайных величин x и y. Что можно сказать о зависимости случайных величин x и y?

Решение. Данный опыт может завершиться одним из четырёх равновозможных результатов, в каждом из которых запишем значение случайных величин x и y, где Г — герб, Ч — число.

Результат испытания	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
Значение x	2	1	1	0
Значение y	2	0	0	–2

Тогда $M(x) = 1$, а $M(y) = 0$ (проверьте это самостоятельно).

Запишем, какие значения при каждом результате испытания принимают случайные величины $x - M(x)$, $y - M(y)$ и $(x - M(x))(y - M(y))$.

Результат испытания	ГГ	ГЧ	ЧГ	ЧЧ
Значение $x - M(x)$	1	0	0	–1
Значение $y - M(y)$	2	0	0	–2
Значение $(x - M(x))(y - M(y))$	2	0	0	2

Теперь найдём ковариацию, т. е. математическое ожидание случайной величины $(x - M(x))(y - M(y))$. Получаем:

$$\operatorname{cov}(x, y) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + 0 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1.$$

Поскольку ковариация не равна нулю, то случайные величины x и y являются зависимыми.

Ответ: $\operatorname{cov}(x, y) = 1$. ■

Если $\operatorname{cov}(x, y) > 0$, то это означает, что увеличение значений одной случайной величины, вообще говоря, ведёт к тому, что значения второй случайной величины также вырастут.

Обратите внимание, что это утверждение говорит лишь о некоторой общей тенденции, в целом характеризующей случайные величины x и y с положительной ковариацией. Например, увеличение времени занятия спортом, вообще говоря, ведёт к укреплению здоровья. Однако это утверждение носит лишь общий характер и может оказаться неверным в частном случае — чрезмерное увеличение нагрузки может привести к серьёзным травмам.

В решённой выше задаче $\operatorname{cov}(x, y) = 1$, т. е. $\operatorname{cov}(x, y) > 0$. Это означает, что чем больше выпадет гербов (значение x), тем, вообще говоря, большей будет разница между количеством выпавших гербов и чисел (значение y).

Если $\operatorname{cov}(x, y) < 0$, то с увеличением значений одной случайной величины, вообще говоря, уменьшится значение второй случайной величины.

Если образно сравнить теорию вероятностей и геометрию, то ковариация случайных величин — это скалярное произведение векторов. Посмотрите на следующие свойства ковариации и сравните их со свойствами скалярного произведения:

1. $\operatorname{cov}(x, x) \geqslant 0$;
2. $\operatorname{cov}(x, y) = \operatorname{cov}(y, x)$;
3. $\operatorname{cov}(\lambda x, y) = \lambda \operatorname{cov}(x, y)$, где λ — некоторая константа;
4. $\operatorname{cov}(x + y, z) = \operatorname{cov}(x, z) + \operatorname{cov}(y, z)$;
5. $\operatorname{cov}^2(x, y) \leqslant D(x)D(y)$.

Упражнения

35.1. Докажите свойства ковариации 1–5, приведённые в конце этого параграфа.

35.2. Докажите, что:

1) $\operatorname{cov}(x, y) = M(xy) - M(x)M(y)$;
2) $D(x + y) = D(x) + D(y) + \operatorname{cov}(x, y)$.

35.3. Монету подбрасывают три раза. Пусть x — количество гербов, которые выпали на монетах, а y — количество гербов, которых выпали на монетах при первых двух подбрасываниях. Найдите ковариацию случайных величин x и y.

35.4. Игральный кубик подбрасывают один раз. Пусть $x = 1$, если выпала пятёрка, и $x = 0$ в остальных случаях; $y = 1$, если выпала шестёрка, и $y = 0$ в остальных случаях. Найдите ковариацию случайных величин x и y.

35.5. Игральный кубик подбрасывают n раз. Пусть x — количество выпавших при этом пятёрок, а y — шестёрок. Найдите ковариацию случайных величин x и y.

35.6. Монету подбрасывают 11 раз. Пусть x — количество гербов, выпавших при первых 10 подбрасываниях, а y — количество гербов, выпавших при последних 10 подбрасываниях. Найдите ковариацию случайных величин x и y.

§ 36 Коэффициент корреляции

Ковариация, рассмотренная в предыдущем параграфе, характеризует зависимость двух случайных величин.

Пусть в некотором опыте рассматривают три случайные величины x, y, z и пытаются выяснить, насколько сильно информация о значениях величин y и z влияет на возможные значения величины x. Подсчитав ковариацию, выяснили, что

$$\operatorname{cov}(x, y) = \frac{1}{100}, \ \ \operatorname{cov}(x, z) = 1000.$$

Означает ли это, что величина z сильнее влияет на x, чем величина y?

Ответ на этот вопрос отрицательный. Дело в том, что даже при малом значении ковариации может иметь место очень сильная зависимость между случайными величинами.

Например, пусть случайная величина y определяется формулой $y = \frac{x}{100}$. Это означает, что случайные величины x и y сильно зависят одна от другой — ведь, зная значение одной из них, можно со 100-процентной вероятностью предсказать значение другой. Тем не менее ковариация этих величин может оказаться незначительной. Действительно, если, например, $M(x) = 0$ и $D(x) = 1$, то $M(y) = M\left(\frac{x}{100}\right) = \frac{1}{100}M(x) = 0$. Поэтому

$$\operatorname{cov}(x, y) = M((x - M(x))(y - M(y))) = M(xy) =$$
$$= M\left(\frac{x^2}{100}\right) = \frac{1}{100}M(x^2) = \frac{1}{100}D(x) = \frac{1}{100}.$$

Таким образом, ковариация является не очень удобным инструментом для того, чтобы судить о степени зависимости между случайными величинами. Для таких целей обычно используют другой коэффициент.

Определение

Пусть дисперсии $D(x)$ и $D(y)$ случайных величин x и y не равны нулю. Число $\dfrac{\operatorname{cov}(x,\ y)}{\sqrt{D(x)}\cdot\sqrt{D(y)}}$ называют коэффициентом корреляции между случайными величинами x и y, обозначают r_{xy}.

Преимущества коэффициента корреляции проявляются в его свойствах.

1. $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$.

2. $|r_{xy}| = 1$ тогда и только тогда, когда существуют такие числа $k \neq 0$ и b, что $y = kx + b$ с вероятностью 1. Причём если $r_{xy} = 1$, то $k > 0$, и если $r_{xy} = -1$, то $k < 0$.

Таким образом, если $r_{xy} = 1$ или $r_{xy} = -1$, то случайные величины x и y связаны линейно. Вообще, коэффициент корреляции показывает степень линейной зависимости между x и y. Чем больше $|r_{xy}|$, тем более зависимость между x и y напоминает линейную.

Например, рассмотрим следующий опыт. Монету подбрасывают n раз. Пусть x — количество выпавших при этом гербов, а y — количество выпавших гербов при первых $n - k$ подбрасываниях.

Понятно, что различие между величинами x и y определяется количеством гербов, выпавших при последних k подбрасываниях. За k подбрасываний в среднем появится $\dfrac{k}{2}$ гербов. Поэтому естественно предполагать, что между значениями случайных величин x и y скрыта зависимость, близкая к линейной: $x = y + \dfrac{k}{2}$. Предполагаемую линейную зависимость между x и y можно подтвердить, подсчитав значение коэффициента корреляции r_{xy}.

Например, если $n = 3$ и $k = 1$, то $\operatorname{cov}(x,\ y) = \dfrac{1}{2}$ (проведите соответствующие вычисления самостоятельно). Поскольку случайные величины имеют биномиальные распределения, то можно записать: $D(x) = \dfrac{3}{4}$, $D(y) = \dfrac{1}{2}$. Поэтому

$$r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,\, y)}{\sqrt{D(x)} \cdot \sqrt{D(y)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}816\ldots$$

Видим, что значение $r_{xy} = 0{,}816\ldots$ расположено достаточно близко к 1. Это подтверждает наши рассуждения и означает наличие достаточно явной линейной зависимости между случайными величинами x и y.

Во многих практических задачах, особенно когда распределения случайных величин x и y известны не полностью, оценить наличие линейной связи между этими величинами пытаются статистическими методами. Например, пусть x — рост, а y — вес наугад выбранного человека. Интуитивно мы ожидаем, что между этими величинами существует какая-то линейная зависимость. Однако, чтобы подтвердить такую гипотезу и вычислить коэффициент корреляции, придётся опросить всех людей на свете. Конечно, это невозможно реализовать, да в этом и нет необходимости. Оценить коэффициент корреляции с приемлемой точностью можно, зная рост x_i и вес y_i лишь небольшого количества людей. Для этого используют так называемый *выборочный коэффициент корреляции*:

$$r_{xy}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2}}, \tag{1}$$

где n — количество опрошенных людей, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

Обратите внимание, что структура формулы (1) напоминает определение $r_{xy} = \frac{\operatorname{cov}(x,\, y)}{\sqrt{D(x)} \cdot \sqrt{D(y)}}$. И это не случайно. Дело в том, что в статистике, помимо выборочного коэффициента корреляции, существуют оценки и для других параметров: математического ожидания, дисперсии, ковариации и т.д. Например, вы, скорее всего, догадались, что $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ — это выборочное математическое ожидание случайной величины x, а формулу (1) можно получить, если выборочную ковариацию разделить на произведение квадратных корней выборочных дисперсий.

Более подробно со свойствами таких статистических оценок и их применением вы сможете ознакомиться, если примете участие в работе над проектом «Совместные наблюдения двух случайных величин. Линейная регрессия и ранговая корреляция».

36.1. Докажите, что $-1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1$.

36.2. Докажите, что если случайные величины x и y связаны линейной зависимостью, т. е. $y = kx + b$, где $k \neq 0$, то $r_{xy} = 1$ при $k > 0$ и $r_{xy} = -1$ при $k < 0$.

36.3. Монету бросают n раз. Пусть x — количество выпавших при этом гербов, y — количество выпавших чисел. Найдите коэффициент корреляции между случайными величинами x и y.

36.4. Игральный кубик подбрасывают один раз. Пусть $x = 1$, если выпала пятёрка, и $x = 0$ в остальных случаях; $y = 1$, если выпала шестёрка, и $y = 0$ в остальных случаях. Найдите коэффициент корреляции между случайными величинами x и y.

36.5. Игральный кубик подбрасывают n раз. Пусть x — количество выпавших при этом пятёрок, а y — количество шестёрок. Найдите коэффициент корреляции между случайными величинами x и y.

36.6. Монету подбрасывают n раз. Пусть x — количество выпавших при этом гербов, а y — количество выпавших гербов при первых $n - k$ подбрасываниях. Докажите, что коэффициент корреляции между случайными величинами x и y равен $r_{xy} = \sqrt{1 - \frac{k}{n}}$.

§ 37 Непрерывно распределённые случайные величины

До этого момента мы рассматривали дискретные случайные величины. Однако существуют случайные величины, не являющиеся дискретными.

Например, рассмотрим случайную величину t, равную выбранному случайным образом числу из промежутка $[0; 1]$. Тогда множеством значений случайной величины t будет промежуток $[0; 1]$. Все элементы промежутка $[0; 1]$ нельзя записать в виде последовательности[1], поэтому случайная величина t не является дискретной.

Попробуем вычислить, чему равна вероятность того, что случайная величина t примет, например, значение, равное $\frac{1}{3}$. Если мы попытаемся организовать выбор так, чтобы все числа на промежутке $[0; 1]$ находи-

[1] С доказательством этого факта вы ознакомитесь, если продолжите изучать математику в высшем учебном заведении.

лись в «равных условиях», то нам придётся принять, что эта вероятность равна нулю. Действительно, вероятность события $\left\{t = \frac{1}{3}\right\}$ не может быть больше нуля, поскольку в нашем опыте бесконечно много равновероятных исходов.

Понятно, что утверждение $P\left(t = \frac{1}{3}\right) = 0$ верно не только для числа $\frac{1}{3}$, но и для любого другого числа из промежутка [0; 1]. Таким образом, случайная величина t принимает каждое своё значение с вероятностью, равной нулю! Если для дискретных случайных величин таблица распределения вероятностей играла ключевую роль, то в данном случае такая «таблица» была бы бессмысленной, поскольку строка вероятностей состояла бы из одних нулей. Это означает, что описывать случайную величину t нужно принципиально иначе. Ознакомимся с таким способом.

Определение

Пусть t – случайная величина и существует определённая на R неотрицательная функция $p(x)$ такая, что для любых чисел a и b, где $a < b$, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $p(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$, равна вероятности того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток $[a; b]$. В таком случае говорят, что функция $p(x)$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины t (рис. 37.1).

Случайные величины, для которых существует плотность распределения вероятностей, не являются дискретными. Их относят к классу **непрерывно распределённых** случайных величин, или, говоря короче, **непрерывных** случайных величин.

Примером непрерывной случайной величины может быть время, проведённое на остановке до прихода автобуса, скорость движущегося по дороге автомобиля, масса сорванного с дерева яблока и т. д.

Образно можно сказать, что значения непрерывной случайной величины непрерывно заполняют некоторый промежуток числовой прямой. При этом плотность распределения вероятностей помогает понять, вблизи каких чисел вероятность появления случайной величины больше, а вблизи каких меньше.

Например, на рисунке 37.2 изображён график плотности распределения вероятностей некоторой случайной величины. Видим, что в точке x_1 значение плотности больше, чем в точке x_2. То же самое можно сказать и о точках, близких к x_1 и к x_2 соответственно. Поэтому если рассмотреть две узкие криволинейные трапеции с одинаковыми основаниями,

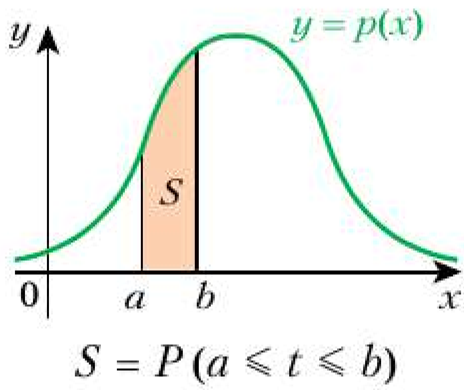


Рис. 37.1

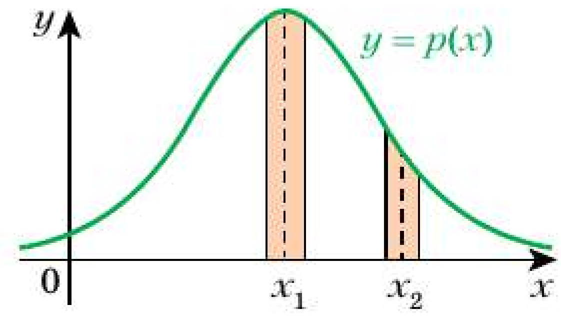


Рис. 37.2

содержащие точки x_1 и x_2, то площадь криволинейной трапеции, содержащей точку x_1, будет больше. Это означает, что рассматриваемая случайная величина с большей вероятностью примет значение в окрестности числа x_1, чем в такой же окрестности числа x_2.

Обратите внимание, что в только что рассмотренном примере мы говорим о вероятности того, что значение случайной величины попадёт в промежуток, содержащий число x_1. Вероятность же того, что случайная величина примет значение x_1, равна нулю.

Приведём ещё один пример. На рисунке 37.3 изображён график плотности $p(x)$ распределения вероятностей некоторой случайной величины t. Опираясь на этот график, можно сделать, например, такие заключения:

• вероятность того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток [1; 2], равна площади закрашенного в фиолетовый цвет прямоугольника, т. е. равна $\frac{1}{10}$;

• вероятность того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток [–5; 0], равна площади закрашенного в оранжевый цвет треугольника, т. е. равна $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$;

• вероятность того, что значение случайной величины t попадёт в промежуток [4; 6], равна нулю, поскольку на этом промежутке плотность

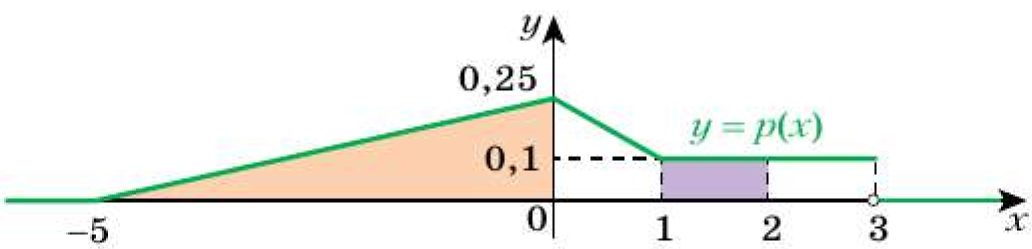


Рис. 37.3

распределения вероятностей $p(x)$ равна нулю и, значит, площадь соответствующей криволинейной трапеции тоже нулевая.

Вообще, всюду вне промежутка $[-5; 3]$ плотность распределения вероятностей $p(x)$ равна нулю. Это означает, что с вероятностью 1 все значения случайной величины t попадают в промежуток $[-5; 3]$. Можно сказать и иначе — площадь подграфика функции $p(x)$ на промежутке $[-5; 3]$ равна 1.

Поскольку плотность распределения вероятностей может принимать положительные значения на всей числовой прямой, то для вычисления вероятностей некоторых событий иногда нужно искать площади неограниченных фигур. Например, рассмотрим график плотности распределения вероятностей, изображённый на рисунке 37.4. В данном случае можно, например, сказать, что:

- вероятность того, что значение случайной величины t будет отрицательным, равна площади закрашенной в оранжевый цвет неограниченной фигуры;
- вероятность того, что $t \geqslant 3$, равна площади закрашенной в фиолетовый цвет неограниченной фигуры.

Кроме того, имеет место следующее утверждение.

Утверждение

Если функция $p(x)$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины t, то площадь подграфика функции $p(x)$ на всей числовой прямой равна 1.

Действительно, площадь подграфика функции на всей числовой прямой равна вероятности достоверного события «значение случайной величины является действительным числом».

Пример. Случайная величина t равна температуре воздуха (в градусах Цельсия) в некотором городе в конце ноября. Чётная функция $p(x)$, график которой представлен на рисунке 37.5, является плотностью распределения вероятностей случайной величины t. Известно, что площадь

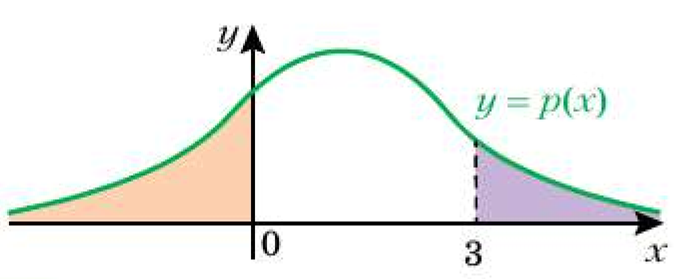


Рис. 37.4

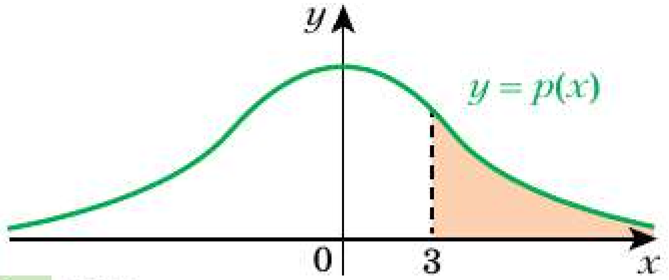


Рис. 37.5

фигуры, выделенной цветом, равна 0,27. Найдите вероятность того, что температура воздуха:

1) меньше 3 °C;

2) не больше –3 °C;

3) от –3 до 3 °C;

4) от 0 до 3 °C.

Решение.

1) Нужно найти вероятность события $t < 3$. Поскольку площадь подграфика функции $p(x)$ на всей числовой прямой равна 1, то площадь фигуры, изображённой на рисунке 37.6, равна $1 - 0{,}27 = 0{,}73$. Поэтому можно сказать, что $P(t < 3) = 0{,}73$.

2) Поскольку функция $p(x)$ является чётной, то площадь фигуры, изображённой на рисунке 37.5, равна площади фигуры, изображённой на рисунке 37.7. Поэтому $P(t \leqslant -3) = 0{,}27$.

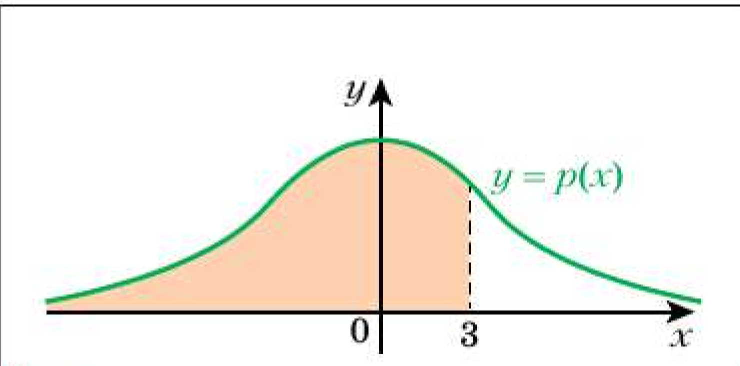


Рис. **37.6**

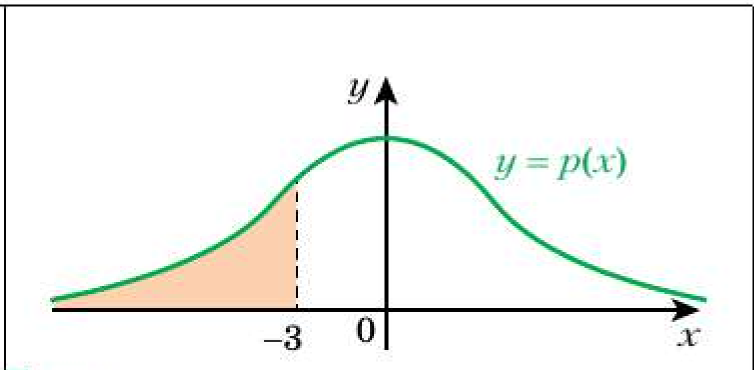


Рис. **37.7**

3) Поскольку площадь подграфика функции $p(x)$ на всей числовой прямой равна 1, то площадь фигуры на рисунке 37.8 можно найти, если из 1 вычесть удвоенную площадь фигуры, изображённой на рисунке 37.5. Получаем: $P(-3 \leqslant t \leqslant 3) = 1 - 2 \cdot 0{,}27 = 0{,}46$.

4) Поскольку функция $p(x)$ является чётной, то площадь её подграфика на промежутке $[0; +\infty)$ равна 0,5. Поэтому площадь фигуры, изображённой на рисунке 37.9, равна $0{,}5 - 0{,}27 = 0{,}23$. Значит, $P(0 \leqslant t \leqslant 3) = 0{,}23$.

Ответ: 1) 0,73; 2) 0,27; 3) 0,46; 4) 0,23. ■

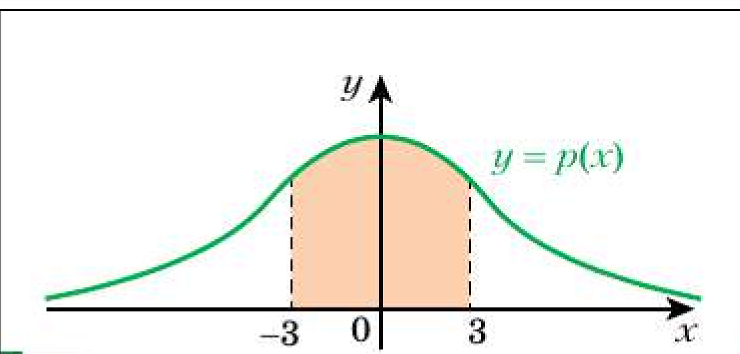


Рис. **37.8**

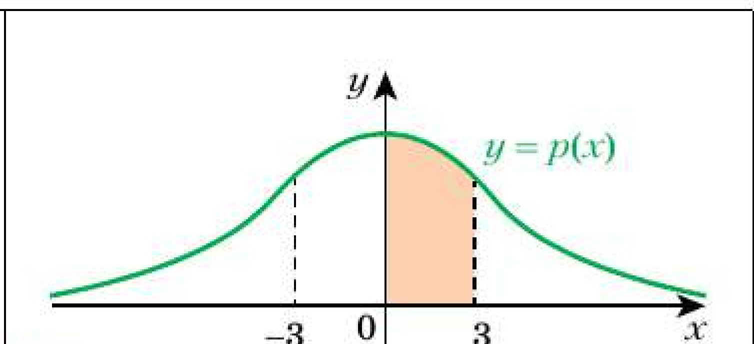


Рис. **37.9**

Для непрерывных случайных величин определяют математическое ожидание, дисперсию и другие характеристики. Эти показатели несут точно такой же смысл, как и в предыдущих параграфах. Так, математическое ожидание указывает на среднее значение случайной величины, а дисперсия характеризует разброс значений. Примечательно то, что все свойства математического ожидания и дисперсии, сформулированные ранее для дискретных случайных величин, сохраняются.

Например, пусть в пакет для сока один автомат наливает x граммов виноградного сока, а затем другой — y граммов яблочного. Если $M(x) = 300$, а $M(y) = 700$, то математическое ожидание случайной величины $z = x + y$, равной количеству виноградно-яблочного сока в пакете, составляет

$$M(z) = M(x) + M(y) = 1000.$$

Если автоматы работают независимо друг от друга и $D(x) = 20$, $D(y) = 50$, то

$$D(z) = D(x) + D(y) = 70.$$

Узнать более подробно о характеристиках непрерывных случайных величин вы сможете, если примете участие в работе над проектом «Характеристики непрерывных случайных величин».

Упражнения

37.1. Можно ли утверждать, что если $p(x)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины t, то $0 \leqslant p(x) \leqslant 1$ для всех x?

37.2. Функция $p(x)$, определённая на всей числовой прямой, является плотностью распределения вероятностей случайной величины t. Может ли множество значений величины t быть конечным?

37.3. Случайная величина t равна величине денежного приза (в тысячах рублей) в некоторой игре. На рисунке 37.10 изображён график плотности $p(x)$ распределения вероятностей величины t. Найдите вероятность того, что игрок выиграет:

1) от 2 до 3 тыс. р.;

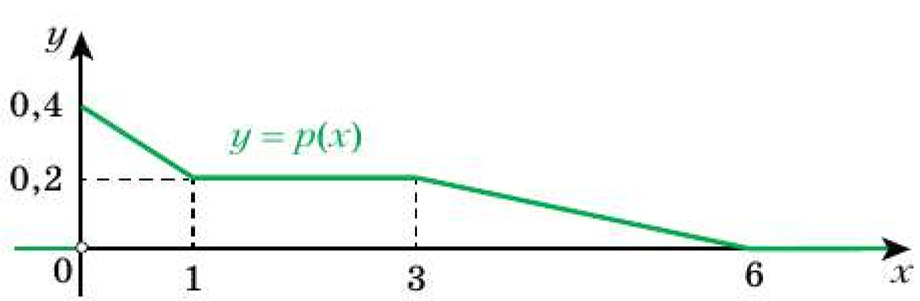


Рис. **37.10**

2) больше 3 тыс. р.;

3) не больше 1,5 тыс. р.

37.4. Случайная величина t равна количеству денежных средств (в миллионах рублей) на банковском счёте в течение дня. Функция плотности распределения вероятностей случайной величины t является чётной. Известно, что $P(0 \leqslant t \leqslant 2) = 0{,}4$. Найдите вероятность того, что на банковском счёте окажется:

1) задолженность, не превышающая 2 млн руб.;

2) сумма, большая 2 млн р.;

3) сумма, меньшая 2 млн р., или даже некоторая задолженность.

37.5. Случайная величина t равна времени (в секундах), за которое спринтер пробегает 100 м. Плотность распределения вероятностей случайной величины t имеет вид $p(x) = \begin{cases} 2\sin^2 \pi x, \ x \in [11; 12], \\ 0, \ x \notin [11; 12]. \end{cases}$ Найдите такое время $t^* \in [11; 12]$, что $P(t \leqslant t^*) = P(t \geqslant t^*)$.

37.6. При каких значениях a функция $p(x) = \begin{cases} ax, \ x \in [1, 3], \\ 0, \ x \notin [1, 3] \end{cases}$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины?

37.7. При каких значениях b функция $p(x) = \begin{cases} \cos x, \ x \in [0, b], \\ 0, \ x \notin [0, b] \end{cases}$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины?

37.8. Функция $p(x) = \begin{cases} e^{-x}, \ x \geqslant 0, \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$ является плотностью распределения вероятностей некоторой случайной величины t. Найдите вероятность того, что:

1) $1 \leqslant t \leqslant 3$; 2) $t > 0$; 3) $t \leqslant 1$.

37.9. Множеством значений случайной величины t является промежуток $[a; b]$. На этом промежутке определена функция F так, что $F(x) = P(t \leqslant x)$, где $x \in [a; b]$. Оказалось, что F — дифференцируемая функция. Докажите, что функция $p(x) = \begin{cases} F'(x), \ x \in [a; b], \\ 0, \ x \notin [a; b] \end{cases}$ является плотностью распределения вероятностей случайной величины t.

37.10. Капля дождя падает в круг радиуса 1 м. Случайная величина t равна расстоянию от упавшей капли до центра круга. Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины t.

§ 38 Равномерное распределение

Вернёмся к случайной величине t, с которой мы начали разговор в предыдущем параграфе. Напомним, что значение t равно наугад выбранному числу на промежутке $[0; 1]$, где выбор организован так, чтобы все числа на промежутке $[0; 1]$ находились «в равных условиях». «Равные условия» для чисел промежутка $[0; 1]$ означают, что функция $p(x)$, плотность распределения вероятностей случайной величины t, является константой на отрезке $[0; 1]$, т. е.

$$p(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty). \end{cases}$$

Обратим внимание, что площадь подграфика функции $p(x)$ на промежутке $[0; 1]$ равна 1 (рис. 38.1).

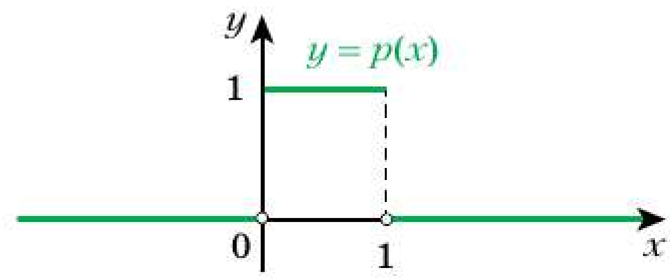


Рис. **38.1**

Определение

Если плотность распределения вероятностей случайной величины t равна константе на некотором промежутке, а вне этого промежутка равна нулю, то говорят, что случайная величина t имеет равномерное распределение на этом промежутке.

Пример. Случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[-2; 5]$. Найдите её плотность распределения вероятностей.

Решение. Поскольку случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[-2; 5]$, то её плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$p(x) = \begin{cases} c, & x \in [-2; 5], \\ 0, & x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty). \end{cases}$$

Подберём константу c так, чтобы площадь подграфика функции $p(x)$ на промежутке $[-2; 5]$ была равной 1. Поскольку рассматриваемая фигура — прямоугольник с основанием $5 - (-2) = 7$ и высотой c, то $7c = 1$. Отсюда $c = \frac{1}{7}$.

Ответ: $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}, & x \in [-2; 5], \\ 0, & x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty). \end{cases}$ ■

Упражнения

38.1. Случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке: 1) $[1; 3]$; 2) $[-4; 6]$. Найдите её плотность распределения вероятностей.

38.2. Случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[0; 1]$. Найдите вероятность того, что:

1) $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{3}$; 2) $t \leqslant \frac{1}{3}$; 3) $t > \frac{1}{2}$; 4) $|3t - 2| \geqslant \frac{1}{4}$.

38.3. Множеством значений случайной величины t является отрезок $[0; 1]$. Известно, что $P(0 \leqslant t \leqslant x) = x$ для всех $x \in [0; 1]$. Можно ли утверждать, что случайная величина t имеет равномерное распределение?

38.4. Случайная величина t имеет равномерное распределение на промежутке $[0; 1]$. Найдите плотность распределения вероятностей случайной величины:

1) $z = 2t + 1$; 2) $u = \sqrt{t}$; 3) $s = t^2 - 4t$.

§ 39 Почему так важны некоторые распределения?

Изучая теорию вероятностей, вы уже не раз сталкивались с ситуацией, когда формально точный ответ может быть малопригоден для практического применения. Например, в § 22 учебника, посвящённом схеме Бернулли, при решении примера 4 возникла случайная величина, имеющая гипергеометрическое распределение. Точные формулы распределения вероятностей этой случайной величины привели бы к расчётам, содержащим 100-значные числа.

Рассматриваемая задача была решена на основе другой вероятностной модели, приводящей не к гипергеометрическому, а биномиальному распределению. Такая замена позволила значительно упростить вычисления.

Ещё один пример такой замены вы наблюдали в § 30 этого приложения. Тут вместо точного, но громоздкого биномиального распределения использовалось распределение Пуассона.

В теории вероятностей такой подход применяется достаточно широко. Примечательно то, что многие дискретные распределения, например биномиальное, достаточно хорошо приближаются непрерывными. Более того, оказывается, что существует совсем небольшое количество различных непрерывных распределений, позволяющих решать подавляющее большинство практически важных вероятностных задач. Это означает, что важно изучить их характерные свойства и особенности.

В школьном курсе вы начнёте знакомство с двумя таким распределениями: **нормальным и показательным.**

Рассмотрим задачу, приводящую к нормальному распределению.

В некоторой стране на всенародных выборах было установлено, что партию A поддерживают 57,08 % избирателей.

Центр изучения общественного мнения проводит опрос с целью подтвердить результаты выборов. Для этого планируется опросить 10 000 избирателей, выбранных случайным образом. Следует ли ожидать, что из 10 000 опрошенных партию A поддержат ровно 57,08 %, т. е. 5708 человек? Конечно нет. Мы интуитивно понимаем, что вероятность такого события мала. В то же время информация о том, что из 10 000 опрошенных партию A поддержали от 56 до 58 % людей, представляется весьма правдоподобной.

Найдём вероятности этих событий. Для этого рассмотрим случайную величину x, имеющую биномиальное распределение с параметрами $n = 10\,000$ и $p = 0{,}5708$. Тогда

$$P(x = 5708) = C_{10000}^{5708} \cdot p^{5708} \cdot (1-p)^{10000-5708}. \tag{1}$$

Очевидно, что вычисление этого числа технически затруднительно. Ещё более сложной становится задача, если мы захотим узнать вероятность события $5600 \leqslant x \leqslant 5800$, т. е. того, что из 10 000 респондентов партию A поддержат от 56 до 58 % опрошенных. Для этого придётся просуммировать значения вероятностей $P(x = k)$ при всех натуральных значениях k от 5600 до 5800, где каждое из слагаемых вычисляется по формуле, подобной (1).

Чтобы лучше представить структуру такой суммы, изобразим значения вероятностей $P(x = k)$ при k от 5600 до 5800 в виде гистограммы. Схематически эта гистограмма представлена на рисунке 39.1.

На этой гистограмме каждое из чисел $P(x = k)$ изображается в виде прямоугольника с основанием, равным 1, и высотой, равной вероятности события $x = k$. Поэтому величину $P(x = k)$ можно трактовать как площадь соответствующего прямоугольника. А значит, сумма вероятностей $P(x = k)$ при всех натуральных значениях k от 5600 до 5800 равна площади залитой жёлтым цветом фигуры.

Из рисунка 39.1 также видно, что существует некоторая непрерывная кривая (зелёная линия), достаточно точно описывающая гистограмму биномиального распределения вероятностей. Если эту кривую рассматривать как график плотности распределения вероятностей некоторой непрерывной случайной величины z, то можно считать, что вероятность

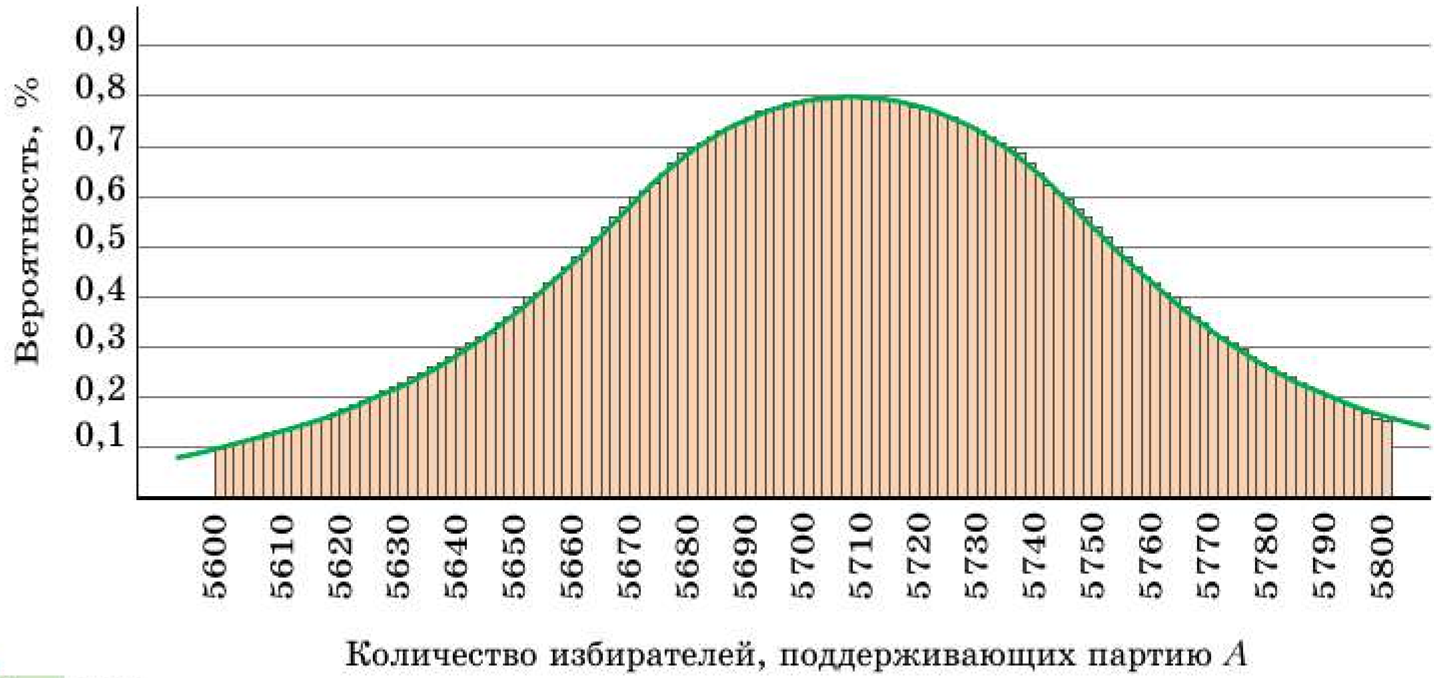


Рис. 39.1

события $5600 \leqslant x \leqslant 5800$ (площадь залитой оранжевым цветом фигуры) приближённо равна вероятности события $5600 \leqslant z \leqslant 5800$ (площадь подграфика зелёной кривой на промежутке от 5600 до 5800). Говорят, что случайная величина z **имеет нормальное распределение.**

Более подробно со свойствами нормального распределения вы ознакомитесь в следующих параграфах.

§ 40 Стандартное нормальное распределение

Следующее непрерывное распределение играет важнейшую роль в теории вероятностей.

Определение

Говорят, что случайная величина имеет стандартное нормальное распределение, если плотность распределения вероятностей этой случайной величины имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (1)$$

На рисунке 40.1 представлен график плотности стандартного нормального распределения. Это чётная функция, принимающая наибольшее значение при $x = 0$, возрастающая на промежутке $(-\infty; 0]$ и убывающая на промежутке $[0; +\infty)$. Исходя из этого, можно сделать такие выводы. Если случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение, то:

1) множество значений совпадает со всей числовой прямой;

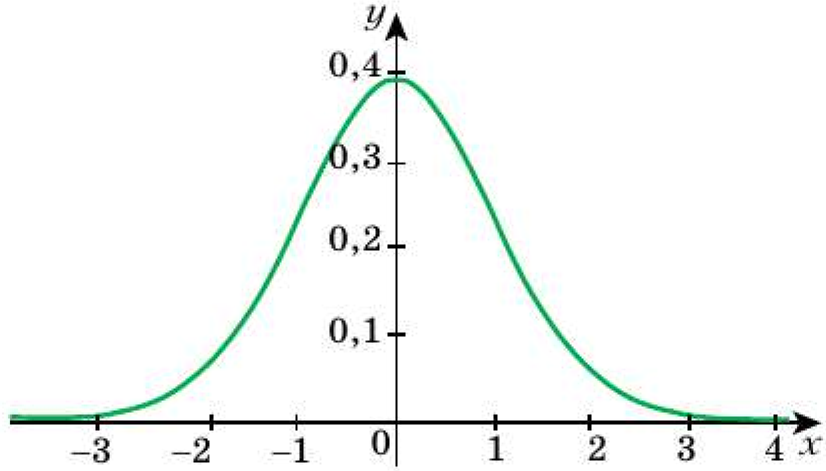


Рис. 40.1

2) вероятность того, что $z \geqslant 0$, равна 0,5 (вероятность того, что $z \leqslant 0$, также равна 0,5);

3) вероятность того, что значение z попадёт в промежуток $[a; b]$, равна вероятности того, что значение z попадёт в промежуток $[-b; -a]$.

Продолжая изучать теорию вероятностей в вузе, вы ознакомитесь с доказательствами и таких свойств: если случайная величина имеет стандартное нормальное распределение, то её математическое ожидание $\mu = 0$, а стандартное отклонение $\sigma = 1$. Поэтому вместо «стандартное нормальное распределение» также говорят: «нормальное распределение с параметрами $\mu = 0$ и $\sigma = 1$».

Вычислить вероятность того, что случайная величина примет значение из данного промежутка, можно, если найти площадь подграфика плотности распределения вероятностей на данном промежутке. Это можно сделать с помощью определённого интеграла. Однако если первообразную функции плотности распределения вероятностей найти трудно, то этот способ может оказаться неприменимым. Именно так обстоит дело в случае стандартного нормального распределения. Поэтому необходимые значения площадей обычно находят с помощью калькуляторов или компьютеров либо по специальным таблицам приближённых значений. Пример такой таблицы вы можете найти на с. 359–360.

Покажем, как пользоваться такой таблицей.

Пример. Случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Пользуясь таблицей 1, найдите приближённое значение вероятности:

1) $P(0 \leqslant z \leqslant 1)$; 3) $P(z > 0{,}37)$;

2) $P(z \leqslant 2)$; 4) $P(-1 \leqslant z < 0{,}8)$.

Решение. 1) Значения, указанные в таблице 1, представляют площадь подграфика функции (1) на промежутке от нуля до некоторого поло-

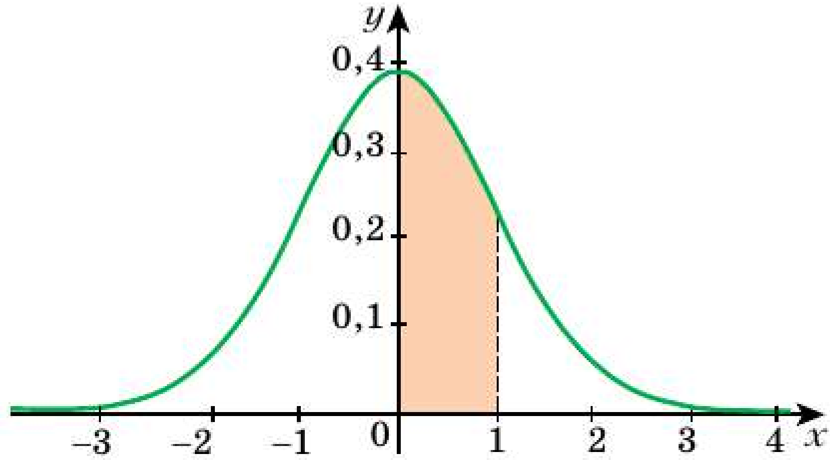


Рис. **40.2**

жительного числа x. Поэтому для вычисления $P(0 \leqslant z \leqslant 1)$ нужно найти значение площади при $x = 1$ (рис. 40.2). Получаем:

$$P(0 \leqslant z \leqslant 1) \approx 0{,}34134.$$

2) Событие $z \leqslant 2$ представим как объединение двух несовместных событий: $z < 0$ и $0 \leqslant z \leqslant 2$ (рис. 40.3). Вероятность того, что $z < 0$, равна 0,5. Вероятность $P(0 \leqslant z \leqslant 2)$ найдём по таблице при $x = 2$. Получаем:

$$P(z \leqslant 2) = P(z < 0) + P(0 \leqslant z \leqslant 2) \approx 0{,}5 + 0{,}47725 = 0{,}97725.$$

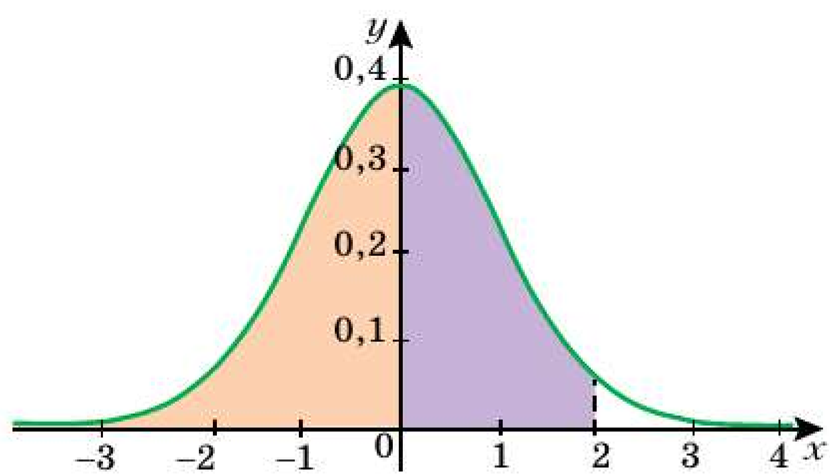


Рис. **40.3**

3) Событие $z \geqslant 0$ можно представить как объединение двух несовместных событий: $0 \leqslant z \leqslant 0{,}37$ и $z > 0{,}37$ (изобразите самостоятельно фигуры, площади которых равны вероятностям этих событий). Поэтому

$$P(z \geqslant 0) = P(0 \leqslant z \leqslant 0{,}37) + P(z > 0{,}37).$$

Откуда получаем:

$$P(z > 0{,}37) = P(z \geqslant 0) - P(0 \leqslant z \leqslant 0{,}37) = 0{,}5 - P(0 \leqslant z \leqslant 0{,}37).$$

Вероятность $P(0 \leqslant z \leqslant 0{,}37)$ найдём по таблице при $x = 0{,}37$. Таким образом, можно записать, что

$$P(z > 0{,}37) \approx 0{,}5 - 0{,}14431 = 0{,}35569.$$

4) Событие $-1 \leqslant z < 0{,}8$ представим как объединение двух несовместных событий: $-1 \leqslant z \leqslant 0$ и $0 < z < 0{,}8$. Поскольку функция (1) является чётной, то $P(-1 \leqslant z \leqslant 0) = P(0 \leqslant z \leqslant 1)$. Поэтому

$$P(-1 \leqslant z < 0{,}8) = P(0 \leqslant z \leqslant 1) + P(0 < z < 0{,}8) \approx$$
$$\approx 0{,}34134 + 0{,}28814 = 0{,}62948.$$

Ответ: 1) 0,34134; 2) 0,97725; 3) 0,35569; 4) 0,62948. ■

Обратите внимание, что в таблице представлены величины площадей только для значений x в диапазоне от 0 до 3,09. А что делать, если нужно найти, например, вероятность $P(0 \leqslant z \leqslant 7)$? В этом случае считают, что с высокой точностью такая вероятность равна 0,5. Действительно,

$$P(0 \leqslant z \leqslant 3{,}09) < P(0 \leqslant z \leqslant 7) < P(0 \leqslant z),$$

причём $P(0 \leqslant z \leqslant 3{,}09) \approx 0{,}499$, а $P(0 \leqslant z) = 0{,}5$.

Упражнения

40.1. Случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Найдите приближённые значения вероятностей:

1) $P(0 \leqslant z \leqslant 2)$;
2) $P(z > 0{,}5)$;
3) $P(z \leqslant 1{,}3)$;
4) $P(z > -1{,}64)$;
5) $P(-1 \leqslant z < 0{,}8)$;
6) $P(-1{,}05 < z \leqslant 12)$.

40.2. Случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Пользуясь таблицей 1, найдите такое значение a, что:

1) $P(0 \leqslant z \leqslant a) = 0{,}18$;
2) $P(z > a) = 0{,}36$;
3) $P(z \leqslant a) = 0{,}78$;
4) $P(z > a) = 0{,}84$;
5) $P(a \leqslant z < 0{,}8) = 0{,}15$;
6) $P(-1{,}05 < z \leqslant a) = 0{,}76$.

§ 41 Нормальное распределение с параметрами μ и σ

Пусть случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Тогда математическое ожидание этой случайной величины равно 0 и её стандартное отклонение равно 1.

Рассмотрим случайную величину $t = 2z - 3$. Используя свойства математического ожидания и стандартного отклонения, получаем:

$$M(t) = M(2z - 3) = 2M(z) - 3 = -3,$$
$$\sigma(t) = \sigma(2z - 3) = 2\sigma(z) = 2.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины t равно $\mu = -3$, а стандартное отклонение — $\sigma = 2$.

На рисунке 41.1 представлены графики плотности распределения вероятностей случайной величины z (зелёная кривая) и t (фиолетовая кривая).

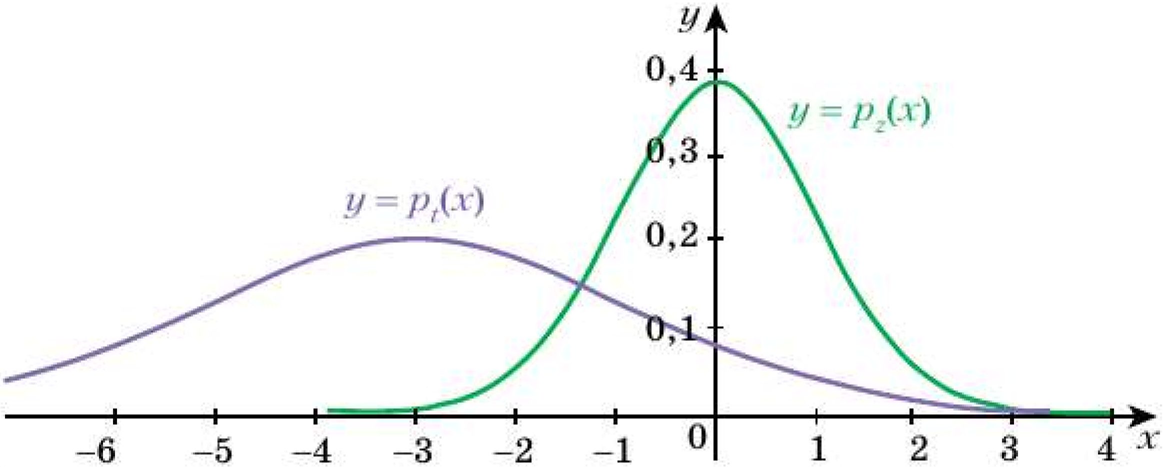


Рис. **41.1**

Обратите внимание, что наибольшее значение фиолетовой кривой расположено в точке $x = -3$, что совпадает с математическим ожиданием случайной величины t. Поскольку площади обеих фигур, расположенных под графиками кривых, равны 1, а стандартное отклонение случайной величины t больше, чем стандартное отклонение случайной величины z, то «холм» фиолетовой кривой более низкий и пологий.

Говорят, что случайная величина t имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = -3$ и $\sigma = 2$.

Определение

Если случайную величину t можно представить в виде $t = az + b$, где случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение, а a и b — некоторые числа, $a \neq 0$, то говорят, что случайная величина t имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = b$ и $\sigma = a$.

Пример 1. Случайная величина t имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 5$ и $\sigma = 3$. Найдите приближённое значение вероятности события $2{,}6 \leqslant t \leqslant 8$.

Решение. Поскольку математическое ожидание случайной величины t равно $\mu = 5$, а стандартное отклонение — $\sigma = 3$, то случайную величину t можно представить в виде $t = 3z + 5$, где случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Поэтому

$$P(2{,}6 \leqslant t \leqslant 8) = P(2{,}6 \leqslant 3z + 5 \leqslant 8) = P(-2{,}4 \leqslant 3z \leqslant 3) = P(-0{,}8 \leqslant z \leqslant 1).$$

Пользуясь таблицей 1 для стандартного нормального распределения, находим, что $P(-0{,}8 \leqslant z \leqslant 1) \approx 0{,}63$.

Ответ: 63 %. ■

Напомним, почему нормальное распределение играет такую важную роль в теории вероятностей.

Рассмотрим случайную величину x, имеющую биномиальное распределение с параметрами n и p. Вы знаете, что математическое ожидание случайной величины x равно $M(x) = np$, а стандартное отклонение — $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)}$. Оказывается, при больших значениях n случайную величину x достаточно точно можно приблизить случайной величиной t, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = np$ и $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. На практике такое приближение используют уже при значениях n, равных нескольким десяткам.

Например, в конце § 39 рассматривалась случайная величина x, описывающая количество людей, поддерживающих партию A среди 10 000 опрошенных. Случайная величина x имела биномиальное распределение с параметрами $n = 10\,000$ и $p = 0{,}5708$. Тогда $M(x) = np = 5708$ и $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)} \approx 49{,}5$. Поэтому случайную величину x с достаточной точностью можно приблизить случайной величиной, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = 5708$ и $\sigma = 49{,}5$. Зелёная кривая на рисунке 41.1 представляет собой график плотности распределения вероятностей именно такой случайной величины.

Теперь мы можем легко ответить на вопрос, поставленный в § 39, а именно: найти вероятность того, что из 10 000 опрошенных партию A поддержат от 56 до 58 % людей, т. е. найти вероятность $P(5600 \leqslant x \leqslant 5800)$.

Рассмотрим случайную величину t, имеющую нормальное распределение с параметрами $\mu = 5708$ и $\sigma = 49{,}5$. Тогда $t = 49{,}5z + 5708$, где случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Получаем:

$$P(5600 \leqslant x \leqslant 5800) \approx P(5600 \leqslant t \leqslant 5800) =$$
$$= P(5600 \leqslant 49{,}5z + 5708 \leqslant 5800) \approx P(-2{,}18 \leqslant z \leqslant 1{,}86) \approx 0{,}95.$$

Таким образом, искомая вероятность приблизительно равна 95 %.

Итак, ***если случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами n и p*** $\in (0; 1)$, ***то при больших значениях n случайная величина x приближённо равна случайной величине t, имеющей нормальное распределение с параметрами*** $\mu = np$ ***и*** $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Пример 2. Баскетболист совершает независимые друг от друга трёхочковые броски в корзину. Вероятность попасть в корзину в каждом броске составляет 70 %. Оцените вероятность того, что из 100 бросков баскетболист забросит мяч от 60 до 80 раз.

Решение. Пусть случайная величина x равна количеству заброшенных баскетболистом мячей. Понятно, что случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}7$. Поэтому $M(x) = np = 70$, $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{21} \approx 4{,}58$. Баскетболист забросит мяч от 60 до 80 раз, если выполняется двойное неравенство $60 \leqslant x \leqslant 80$.

Приблизим случайную величину x случайной величиной t, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = 70$ и $\sigma = 4{,}58$. Тогда $t = 4{,}58z + 70$, где случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Далее запишем:

$$P(60 \leqslant x \leqslant 80) \approx P(60 \leqslant t \leqslant 80) = P(60 \leqslant 4{,}58z + 70 \leqslant 80) \approx$$
$$\approx P(-2{,}18 \leqslant z \leqslant 2{,}18) \approx 0{,}971.$$

Таким образом, $P(60 \leqslant x \leqslant 80) \approx 97\ \%$.

Отметим, что вычисленное с помощью специализированных программ точное значение $P(60 \leqslant x \leqslant 80)$ составляет 97,9... %. Если же воспользоваться неравенством Чебышёва, то можно показать, что $P(60 \leqslant x \leqslant 80) \geqslant 79\ \%$. ■

Преимущества нормального распределения не заканчиваются на его связи с биномиальным распределением. Нормальное распределение пригодно для широкого круга прикладных задач. Например, оно обычно хорошо описывает такие случайные величины, как:

- размеры и массу живых организмов в больших популяциях;
- количественные предпочтения людей в социологических исследованиях;
- спортивные результаты участников массовых соревнований;
- показания физического прибора, полученные при многократных измерениях параметров некоторого объекта или явления;
- размеры, массу, объём изделий, изготовленных на некотором станке;

и многие другие.

Обосновать корректность использования нормального распределения вместо биномиального и других распределений, а также подробнее изучить его свойства вы сможете, если примете участие в работе над проектом «Центральная предельная теорема».

В то же время напомним, что если в биномиальном распределении с параметрами n и p величина $\lambda = np$ принимает относительно небольшое значение (обычно $\lambda < 10$), то даже при больших значениях n такое биномиальное распределение выгодно заменить распределением Пуассона (см. § 30 данного приложения).

Пример 3. Среди всех учащихся 11 классов школы провели тестовые контрольные работы по математике и русскому языку. В среднем ученики школы набрали 63 % баллов по математике со стандартным отклонением 8,2 и 76 % баллов по русскому языку со стандартным отклонением 11,5. Сергей набрал 68 % баллов по математике и 80 % баллов по русскому языку. По какому предмету (математике или русскому языку) результат Сергея лучше относительно результатов остальных учащихся школы?

Решение. Пусть случайная величина x равна результату теста по математике у выбранного наугад школьника, а y — по русскому языку. Будем считать, что случайная величина x имеет нормальное распределение с параметрами $\mu_x = 63$ и $\sigma_x = 8{,}2$, а случайная величина y — нормальное распределение с параметрами $\mu_y = 76$ и $\sigma_y = 11{,}5$. Тогда имеют место равенства $x = 8{,}2z_1 + 63$ и $y = 11{,}5z_2 + 76$, где случайные величины z_1 и z_2 имеют стандартное нормальное распределение.

Для каждого из предметов найдём, сколько школьников сдали тест хуже Сергея. Имеем:

$$P(x < 68) = P(8{,}2z_1 + 63 < 68) \approx P(z_1 < 0{,}61) \approx 73\ \%,$$
$$P(y < 80) = P(11{,}5z_2 + 76 < 80) \approx P(z_2 < 0{,}35) \approx 64\ \%.$$

Таким образом, в школе больше тех, кто выполнил тест по математике хуже Сергея, чем тех, кто выполнил тест по русскому языку хуже Сергея. Поэтому относительно остальных учащихся школы Сергей выполнил лучше тест по математике. ■

Упражнения

41.1. Случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение случайной величины:

1) $x = 2{,}4z + 5$; 2) $y = \dfrac{z - 27}{6{,}5}$.

41.2. Случайная величина x имеет нормальное распределение с параметрами $\mu = 60$ и $\sigma = 4$. Найдите приближённое значение вероятности:

1) $P(60 \leqslant x \leqslant 64)$; 3) $P(x \leqslant 52)$;
2) $P(58 \leqslant x \leqslant 62)$; 4) $P(x > 32)$.

41.3. (*Правило трёх сигм.*) Пусть случайная величина x имеет нормальное распределение с параметрами μ и σ. Докажите, что с вероятностью не меньшей, чем 99 %, случайная величина x принимает значения, удовлетворяющие двойному неравенству $\mu - 3\sigma \leqslant x \leqslant \mu + 3\sigma$.

41.4. Случайная величина x имеет нормальное распределение. Найдите приближённые значения математического ожидания и стандартного отклонения случайной величины x, если $P(x \leqslant 10) = 0{,}26$ и $P(x \geqslant 27) = 0{,}39$.

41.5. Монету подбросили 5000 раз. Оцените, с какой вероятностью частота выпадения герба находится в диапазоне от 48 до 52 %.

41.6. Известно, что вес одной картофелины определённого сорта равен в среднем 206 г и имеет стандартное отклонение 50 г. Картофель удовлетворяет требованиям торговой сети, если вес картофелины не меньше 160 г и не больше 280 г. Оцените вероятность того, что случайно выбранная картофелина удовлетворяет требованиям торговой сети.

41.7. Страховая компания, которая специализируется на страховании недвижимости, заключила 5000 новых договоров на год. При этом на зарплату страховым агентам, аренду офисов и т. д. из привлечённых сумм было потрачено 30 млн р. Каждый страховой взнос составляет 22 тыс. р., но в случае разрушения объекта страхования компания обязуется возместить 1,5 млн р. По опыту прошлых лет известно, что вероятность такого разрушения составляет 0,8 %. Оцените вероятность того, что привлечённых средств не хватит на покрытие выплат по страховым случаям.

41.8. Известно, что 65 % всех сдающих международный тест по английскому языку получают сертификаты. Какой минимальный балл нужно набрать для получения сертификата, если средний балл сдающих тест составляет 165 со стандартным отклонением 13?

41.9. Автомат штампует металлические круглые шайбы для велосипедов. Шайбу можно использовать, если её радиус лежит в диапазоне от 1,98 до 2,03 см. Оцените математическое ожидание и стандартное отклонение радиуса шайб, произведённых этим автоматом, если известно, что 3 % шайб оказываются слишком маленькими, а 2 % — слишком большими.

41.10. Школьник, занимающийся в секции лёгкой атлетики, собирается участвовать в соревнованиях, но не может решить, в какой из дисциплин. На тренировке в беге на 100 м он показал результат 13,8 с, а в прыжках в длину — 4 м 27 см. Известно, что в прошлом году участники этих соревнований в беге на 100 м в среднем показали результат 13,4 с со стандартным отклонением 0,25 с, а в прыжках в длину — 4 м 08 см со стандартным отклонением 15 см. Помогите школьнику принять решение.

41.11. В пакет для сока один аппарат наливает 150 мл морковного сока со средним отклонением 5 мл, а затем другой аппарат — 350 мл яблочного сока со средним отклонением 10 мл. Производитель обещает, что каждый пакет сока содержит не менее 475 мл морковно-яблочного сока. Оцените, какой процент пакетов сока не удовлетворяет стандартам производителя.

41.12. Среднее значение результатов теста на определение IQ (коэффициент интеллекта) равно 100, а стандартное отклонение равно 16. Оцените вероятность того, что из 5 человек, сдающих тест, ровно двое покажут результат, больший 110.

41.13. Средний рост девочек в 11 классе составляет 166 см, а стандартное отклонение — 7 см. Тренер баскетбольной команды ищет девочек ростом не ниже 180 см. Оцените вероятность того, что из 100 одиннадцатиклассниц школы ему удастся собрать команду из 5 человек.

§ 42 Показательное распределение

Рассмотрим несколько опытов.

Физический прибор (детектор) настроен на регистрацию частиц с определёнными физическими характеристиками в потоке солнечного излучения. Каждую миллисекунду детектор отправляет сигнал о том, зафиксирована частица за этот промежуток времени или нет. Пусть t — время, необходимое прибору для регистрации первой такой частицы.

Современная скорострельная пушка производит несколько тысяч выстрелов в минуту. Пусть t — время стрельбы до первого попадания в цель.

Мотоциклист, нарушитель правил дорожного движения, ездит в оживлённом городском транспортном потоке со скоростью 150 км/ч. Пусть t — время езды мотоциклиста в таком режиме до первой аварии.

Понятно, что в этих опытах значение случайной величины t зависит от многих параметров. Например, в последнем примере величина t зависит от состояния дороги, случайных порывов ветра, реакции мотоциклиста, поведения других участников дорожного движения и т. д. Тем не менее все эти случайные величины можно описать единообразно.

Определение

Говорят, что случайная величина имеет показательное распределение с параметром a, где $a > 0$, если плотность распределения вероятностей этой случайной величины имеет вид

$$p(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Оказывается, во всех приведённых примерах можно считать, что случайная величина t имеет показательное распределение, причём число $\frac{1}{a}$ показывает среднее значение (математическое ожидание) случайной величины t.

Покажем, как применяют показательное распределение для решения задач.

Пример 1. Скорострельная пушка производит 6000 выстрелов в минуту, а вероятность того, что отдельный снаряд попадёт в цель, равна $p = \frac{1}{50}$. Случайная величина t равна времени стрельбы до первого попадания в цель.

1) Найдите вероятность события «в течение первой секунды стрельбы цель будет поражена».

2) Оцените вероятность этого события, используя показательное распределение.

Решение. В течение одной секунды пушка производит $\frac{6000}{60} = 100$ выстрелов.

1) Найдём вероятность того, что за первую секунду ни один из 100 снарядов не попадёт в цель, т. е. найдём вероятность события $P(t > 1)$. Получаем:

$$P(t > 1) = (1 - p)^{100} = \left(\frac{49}{50}\right)^{100}.$$

Теперь найдём вероятность события «в течение первой секунды стрельбы цель будет поражена». Получаем:

$$P(0 \leqslant t \leqslant 1) = 1 - P(t > 1) = 1 - \left(\frac{49}{50}\right)^{100} = 0{,}867\ldots$$

2) Поскольку пушка производит 100 выстрелов в секунду и отдельный снаряд попадает в цель с вероятностью $p = \frac{1}{50}$, то естественно предположить, что для первого попадания в цель в среднем потребуется произвести 50 выстрелов, т. е. 0,5 секунды. Поэтому рассмотрим случайную величину t_1, имеющую показательное распределение с параметром $a = \frac{1}{0{,}5} = 2$. Пользуясь этим распределением, находим:

$$P(0 \leqslant t_1 \leqslant 1) = \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 2e^{-2x}dx = 1 - e^{-2} = 0{,}865\ldots$$

Ответ: 1) $1 - \left(\frac{49}{50}\right)^{100} \approx 0{,}867$; 2) $1 - e^{-2} \approx 0{,}865$. ■

Обратите внимание, насколько точно совпадают ответы из пунктов 1 и 2 этой задачи.

Вернёмся к опытам, описанным в начале этого параграфа. Можно заметить, что в этих примерах величина t напоминает дискретную случайную величину с геометрическим распределением (см. § 29 данного приложения). Напомним, что случайная величина, имеющая геометрическое распределение, показывает, какое количество независимых испытаний Бернулли нужно провести до первого успешного исхода. Говоря другими словами, как долго нужно ждать до наступления первого успешного исхода.

Действительно, искомое время ожидания t как бы формируется из отдельных независимых микроопытов – каждую миллисекунду детектор может обнаружить искомую частицу, каждый новый снаряд может попасть в цель, в каждый момент мотоциклист может попасть в аварию, ведь ситуация на дороге меняется совершенно непредсказуемо.

Вероятно, вы заметили, что решение пункта 1 примера 1 также, по сути дела, опиралось на геометрическое распределение.

Вообще, можно доказать, что *если случайная величина имеет геометрическое распределение и каждое испытание Бернулли длится некоторое фиксированное время, то случайную величину, равную времени ожидания первого успешного исхода, можно достаточно точно приблизить случайной величиной, имеющей показательное распределение с параметром a, где число a равно среднему количеству успешных исходов в единицу времени. Можно также сказать, что число $\frac{1}{a}$ равно среднему времени ожидания первого успешного исхода.*

С доказательством этих фактов вы ознакомитесь, если продолжите изучать теорию вероятностей в вузе.

Пример 2. Известно, что некоторый электроприбор с вероятностью 82 % проработает больше года. Оцените вероятность того, что он выйдет из строя в первые 15 месяцев работы.

Решение. Пусть случайная величина t — это время (в годах) работы прибора до поломки. Будем считать, что t описывается показательным распределением с некоторым параметром a, ведь в каждый момент времени работы прибора происходит независимый микроопыт (может подскочить напряжение, прибор могут уронить и т. д.), в результате которого прибор может выйти из строя. По условию задачи вероятность того, что прибор проработает меньше одного года, т. е. $t < 1$, равна 100 % – – 82 % = 18 %. Поэтому можно записать, что

$$P(0 \leqslant t < 1) = \int_0^1 ae^{-ax}dx = 0{,}18.$$

Вычислим интеграл, стоящий в этом равенстве. Имеем:

$$\int_0^1 ae^{-ax}dx = -e^{-ax}\Big|_0^1 = -e^{-a} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-a}.$$

Решая уравнение $1 - e^{-a} = 0{,}18$, находим, что $a = -\ln 0{,}82 \approx 0{,}2$.

Таким образом, будем считать, что случайная величина t описывается показательным распределением с параметром 0,2.

Поэтому вероятность того, что прибор выйдет из строя в первые 15 месяцев работы, т. е. за $\frac{15}{12} = 1{,}25$ года, равна

$$P(0 < t < 1{,}25) = \int_0^{1{,}25} ae^{-ax}dx = -e^{-ax}\Big|_0^{1{,}25} = 1 - e^{-1{,}25a} \approx 0{,}22.$$

Ответ: 22 %. ■

Показательное и геометрическое распределения обладают интересным свойством «отсутствия памяти». Поясним сказанное. Пусть среднее время ожидания некоторого события, например попадания из скорострельной пушки в цель, равно 0,5 с. Тогда, если за первые 0,5 с или даже за первые несколько секунд стрельбы вам не удалось дождаться этого события, то потребуются ещё в среднем те же исходные 0,5 с, чтобы поразить цель, т. е. распределение времени ожидания не изменилось по сравнению с тем, что было в момент начала стрельбы. Этот факт становится понятным, если мы вспомним, что каждый снаряд летит по своей собственной траектории и попадает (или не попадает) в цель независимо от других снарядов. Таким образом, каждый новый выпущенный снаряд «ничего не помнит о неудачах своих предшественников».

Показательное распределение имеет глубокие связи не только с геометрическим распределением, но и с распределением Пуассона. Если распределение Пуассона подсчитывает, сколько раз произошло некоторое редкое событие, то показательное распределение указывает время ожидания до момента, когда это редкое событие произойдёт впервые. Образно говоря, показательное распределение связано с распределением Пуассона подобно тому, как геометрическое распределение связано с биномиальным.

Связь с распределением Пуассона объясняет, почему показательное распределение хорошо описывает, например, время ожидания:

- первой опечатки при наборе текста;
- первого телефонного звонка на данный номер телефона;
- первой пойманной рыбы во время рыбалки;
- первой аварии на некотором участке дороги;
- первой болезни некоторого живого организма или первой поломки какого-нибудь электроприбора;

и т. д. Сравните этот перечень со списком типичных опытов, связанных с распределением Пуассона (см. § 30).

Упражнения

42.1. Петя пошёл на рыбалку на озеро. В среднем ему приходится тратить 20 мин, чтобы поймать очередную рыбу. Петя поймал 3 рыбы и уже потратил 15 мин, пытаясь поймать четвёртую. Сколько минут в среднем ему ещё предстоит потратить, чтобы поймать четвёртую рыбу?

42.2. К началу учебного года Сергей купил себе подарок — новый мобильный телефон. Что больше: вероятность того, что он сломается в первый месяц эксплуатации, или вероятность того, что первая поломка случится в феврале следующего года?

42.3. Наборщик текста печатает со скоростью 200 знаков в минуту. Вероятность того, что за минуту работы он не сделает ни одной опечатки, равна 70 %. Используя: 1) геометрическое; 2) показательное распределение, найдите вероятность того, что наборщик правильно напечатает текст длиной 640 знаков.

42.4. Команда 11 классов почти всегда выигрывает в футбол у команды 8 классов и за любые 10 минут игры забивает гол с вероятностью 90 %. В очередном матче между этими командами на 9-й минуте игры счёт оставался 0 : 0. Оцените вероятность того, что к 10-й минуте команда 11 классов забьёт гол.

42.5. На некотором участке дороги авария в среднем случается каждые 12 дней. Найдите вероятность того, что за 30 дней на этом участке произойдёт по крайней мере одна авария.

42.6. Пусть случайная величина x имеет показательное распределение. Докажите, что случайная величина $y = [x]$, где $[x]$ — целая часть x, имеет геометрическое распределение.

42.7. Менеджеру по продажам телевизоров клиенты в среднем звонят каждые 4 мин в течение всего рабочего дня, а менеджеру по продажам стиральных машин — каждые 6 мин. Второй менеджер ушёл в отпуск, и его телефон поставили первому менеджеру, который теперь отвечает на все звонки. Найдите вероятность того, что менеджеру придётся ответить на звонок уже в первую минуту рабочего дня.

42.8. Вероятность того, что в течение часа в аптеку зайдёт ровно 5 покупателей, в 1,2 раза больше вероятности того, что зайдёт ровно 4 покупателя. Оцените вероятность того, что очередного покупателя придётся ждать больше 20 мин.

§ 43 Как принять решение

При испытании нового профилактического противовирусного препарата оказалось, что из 300 людей, принимавших препарат, в осенне-зимний период заболело 33 человека (11 %), в то время как среди людей, не принимавших никаких лечебных средств, процент заболевших за тот же период составил 16 %. Можно ли считать, что новый препарат обладает профилактическим действием?

Мы видим, что процент заболевших людей снизился с 16 до 11 %. Однако достаточно ли это снижение существенное? Ведь существует вероятность того, что среди людей, принимавших препарат, случайно оказалось довольно много здоровых, имеющих крепкий иммунитет, что и послужило причиной снижения процента заболевания. Говоря другими словами, причиной всему могли быть лишь случай и удача, а не исследуемый препарат. В математической статистике существуют методы, позволяющие ответить на такие вопросы.

Предположим, что препарат не оказывает профилактического действия. Тогда имеет смысл считать, что наугад выбранный человек, принимавший этот препарат, заболеет с вероятностью, равной $p = 0{,}16$. Найдём вероятность того, что в случайно выбранной группе из 300 людей, принимавших препарат, количество заболевших не превысит 33 человек (составит 11 % или менее). Если x — случайная величина, равная количеству заболевших людей в группе, то искомая вероятность равна $P(x \leqslant 33)$. Понятно, что величина x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 300$ и $p = 0{,}16$. Поскольку $M(x) = np = 300 \cdot 0{,}16 = 48$ и $\sigma(x) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300 \cdot 0{,}16 \cdot (1 - 0{,}16)} \approx 6{,}35$, то случайную величину x можно приблизить случайной величиной t, имеющей нормальное распределение с параметрами $\mu = 48$ и $\sigma = 6{,}35$. Тогда имеет место равенство $t = 6{,}35z + 48$, где случайная величина z имеет стандартное нормальное распределение. Далее запишем:

$$P(x \leqslant 33) \approx P(t \leqslant 33) = P(6{,}35z + 48 \leqslant 33) \approx P(z \leqslant -2{,}36) \approx 0{,}9\%.$$

Вероятность 0,9 % мала. Это означает, что снижение количества заболевших людей с 16 до 11 % вряд ли объясняется только случайными факторами. Поэтому вполне разумно считать, что испытуемый препарат обладает профилактическим действием и именно он послужил причиной снижения заболеваемости.

Приведённую задачу относят к важному и обширному разделу теории вероятностей и математической статистики «Проверка гипотез». Познакомимся с элементами этого раздела подробнее.

Пусть в некотором опыте изучается случайная величина. Зная её распределение вероятностей, можно найти различные характеристики этой случайной величины — математическое ожидание, вероятности различных событий и т. д.

К сожалению, распределение вероятностей известно далеко не всегда. Поэтому в исследованиях приходится делать некоторые предположения (гипотезы) относительно всего распределения вероятностей в целом или его параметров.

В приведённом выше примере речь шла о случайной величине x, равной количеству заболевших людей в группе из 300 человек, принимавших препарат. Случайная величина x имеет биномиальное распределение с параметром $n = 300$ и неизвестным параметром p. Число p показывает вероятность того, что случайно выбранный человек, принимавший препарат, заболеет.

Поскольку известно, что случайно выбранный человек, не принимавший никаких лечебных средств, заболеет с вероятностью 16 %, то исследователь формирует две взаимоисключающие гипотезы:

H_0: параметр p равен 16 %;

H_1: параметр p меньше 16 %.

Гипотеза H_0 означает, что человек, принимавший препарат, заболеет с такой же вероятностью, что и человек, не принимавший никаких лечебных средств. Иными словами, гипотеза H_0 выражает тот факт, что исследуемый препарат не оказывает профилактического действия. Гипотеза H_1 означает, что препарат оказывает профилактическое действие.

Предположения H_0 и H_1 не являются равноправными. В общем случае гипотеза H_0 обычно выражает тот факт, что между двумя исследуемыми явлениями нет взаимосвязи. В нашем примере H_0 выражает отсутствие связи между профилактикой заболевания и приёмом препарата. Гипотезу H_0 называют **основной** или **нулевой гипотезой**, а вторую гипотезу H_1 — **конкурирующей** или **альтернативной**.

Гипотезу называют **простой**, если она однозначно определяет распределение изучаемой случайной величины. Например, гипотеза H_0 является простой, поскольку однозначно определяет параметры биномиального распределения случайной величины x. Гипотеза H_1 простой не является.

Далее мы будем рассматривать случай, когда основная гипотеза H_0 является простой. Более подробно с общими методами проверки гипотез вы сможете ознакомиться, если примете участие в работе над проектом «Эмпирическое распределение и проверка гипотез».

Обычно исследователь пытается понять, в какой степени имеющаяся информация согласуется с основной гипотезой. Если такого согласования нет или оно крайне маловероятно, то это является аргументом в пользу конкурирующей гипотезы. Поэтому существуют только два результата проверки гипотез.

Вывод 1: существуют весомые аргументы отклонить гипотезу H_0 и принять гипотезу H_1.

Вывод 2: нет весомых аргументов отклонить гипотезу H_0.

Обратите внимание, что вывод 2 не говорит о том, что гипотеза H_0 верна. Для обоснования справедливости гипотезы H_0 может попросту не быть доказательств. Действующий тут принцип широко используется в юриспруденции. Пусть основная гипотеза H_0 утверждает, что подозреваемый невиновен. Тогда вывод 2 означает, что человек не может быть осуждён, пока нет весомых доказательств его вины. Однако отсутствие у следствия таких доказательств вины ещё не является действительным доказательством невиновности. Тем не менее в этом случае подозреваемого отпустят на свободу.

Таким образом, вывод 2 является малоинформативным. Такой вывод не позволяет убедительно заявить о том, какая из двух гипотез, H_0 или H_1, является верной.

Вывод 1 является значительно более информативным. Он говорит о том, что существует достаточно доказательств, позволяющих практически исключить возможность истинности гипотезы H_0. Однако даже в этом случае нельзя быть на 100 % уверенным, что гипотеза H_0 ошибочна.

Например, если вывод исследователя звучит так: «На основании имеющихся данных можно сделать вывод, что с вероятностью не менее 99 % гипотезу H_0 следует отклонить», то это не означает, что гипотеза H_0 гарантированно неверна. Он говорит лишь о том, что объяснить имеющиеся в распоряжении исследователя данные только случайными факторами крайне сложно — вероятность этого не превышает 1 %. Иными словами, вероятность отвергнуть гипотезу H_0 при условии, что на самом деле она верна, не превышает 1 %.

Вообще, если основная гипотеза H_0 отклонена, хотя на самом деле она верна, то говорят, что произошла **ошибка первого рода**. Чтобы контролировать частоту появления ошибки первого рода, рассматривают такое число α, что вероятность появления ошибки первого рода не превосходит α. Это число называют **уровнем значимости**. Конечно, уровень значимости стараются сделать маленьким. Популярными уровнями значимости являются 10 %, 5 %, 1 % и 0,1 %.

Уровень значимости, как правило, устанавливают до начала исследования. Чем меньше установленный уровень значимости, тем больше уверенность в том, что основная гипотеза будет отвергнута справедливо.

Однако чрезмерное уменьшение уровня значимости увеличивает риск совершить другую ошибку, её ещё называют **ошибкой второго рода**, — не отвергнуть основную гипотезу, хотя на самом деле верна конкурирующая. Дело в том, что очень маленький уровень значимости позволяет «списать на случайность» даже самые невероятные данные.

Решение о том, что основную гипотезу следует отвергнуть, принимают, рассуждая от противного. Приведём эти рассуждения.

Предполагают, что гипотеза H_0 верна и рассматривают некоторое событие A, вероятность которого мала и не превышает установленный заранее уровень значимости α. Далее проводят опыт. Если событие A произошло, то делается первый вывод: «С вероятностью не менее $1 - \alpha$ гипотезу H_0 следует отклонить (и принять гипотезу H_1)». Если событие A не произошло, то делается второй вывод: «При данном уровне значимости α имеющиеся данные не позволяют отклонить гипотезу H_0».

Описанную выше процедуру принятия решения называют **статистическим критерием** проверки основной гипотезы.

Например, установим в приведённом в начале параграфа примере уровень значимости равным 1 %. Пусть событие A состоит в том, что $x \leqslant 33$, т. е. в случайно выбранной группе из 300 людей, принимавших препарат, количество заболевших не превышает 33 человек. Как было показано, вероятность этого события меньше 1 % (уровень значимости). Тем не менее в проведённом испытании препарата событие A произошло. Поэтому гипотезу H_0 следует отклонить.

Упражнения

43.1. Случайно отобранной группе людей из 20 человек показали рекламу некоторого продукта перед её запуском на телевидении и сформулировали две гипотезы:
A — «реклама не даёт никакого эффекта»;
B — «реклама имеет эффект».
В результате исследования математик дал заключение: «Существуют весомые аргументы считать, что реклама имеет эффект». Какая из гипотез A и B нулевая, а какая альтернативная?

43.2. На выходе из супермаркета используется антикражевая система сигнализации. При её проектировании рассматривали две гипотезы:
A — «выходящий из супермаркета человек оплатил все свои покупки»;
B — «выходящий из супермаркета человек не оплатил все свои покупки».

Система подаёт сигнал, когда есть существенные основания заподозрить выходящего человек в том, что он не оплатил покупки. Какая из гипотез A и B нулевая, а какая альтернативная?

43.3. Коммерческий агент предлагает автолюбителю купить «антифрикционную наноприсадку» для уменьшения расхода топлива и выдаёт разовую порцию присадки для проверки. Автолюбитель готов купить присадку только в том случае, если будут весомые основания считать её эффективной. Какие две гипотезы сформулирует автолюбитель относительно этой присадки перед проверкой? Какая из двух гипотез основная, а какая конкурирующая?

43.4. Используемая в супермаркетах антикражевая система сигнализации иногда срабатывает, когда из магазина выходит добросовестный покупатель. Какого рода ошибка возникает в этом случае? Как нужно изменить уровень значимости, чтобы уменьшить количество таких случаев? Почему собственники магазина не принимают решения о такой перенастройке системы?

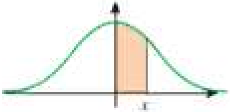
43.5. Собственник птицефабрики, поставляющей яйца, утверждает, что его продукция содержит только 3 % битых яиц. Однако при проверке очередной партии из 2000 яиц оказалось, что в ней 4 % битых яиц. Стоит ли доверять заявлению собственника?

43.6. Лидер политической партии заявляет, что 25 % избирателей поддерживают партию. Существуют ли весомые основания обвинить лидера партии в манипуляции данными, если при опросе 100 человек оказалось, что эту партию поддержали только 20 человек?

43.7. Отрабатывая штрафные броски, баскетболист попадал в корзину с вероятностью 70 %. В конце тренировки спортсмену показалось, что он стал бросать мяч точнее, и, выполнив 30 тестовых бросков, баскетболист попал в корзину 28 раз (более 93 % попаданий). Используя уровень значимости $\alpha = 0{,}1$ %, определите, можно ли утверждать, что спортсмен в конце тренировки стал бросать точнее? Ошибка какого рода возникает при ответе на предыдущий вопрос, если вероятность попадания в корзину в конце тренировки выросла? Чем можно объяснить возникновение этой ошибки?

43.8. Чтобы сварить компот, мама поручила Малышу добавить в кипяток поллитровую банку варенья с вишнями. Однако Карлсон заявил, что он лучший в мире эксперт по компотам, и принялся варить компот сам. Когда из приготовленной Карлсоном двухлитровой кастрюли компота Малыш наполнил стакан объёмом 200 мл, то в нём оказались только 2 вишенки. Есть ли у Малыша весомые основания заподозрить Карлсона, что тот съел часть варенья, если в банке было 70 вишенок?

Таблица 1. Таблица нормального распределения



x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1,0	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41309	0,41466	0,41621	0,41774

Окончание таблицы

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2,0	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3,0	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900

Проектная работа

Эта рубрика адресована прежде всего тем, кто хочет научиться приобретать знания самостоятельно, творчески мыслить, формировать, выражать и отстаивать свою точку зрения, выдвигать гипотезы, находить наиболее рациональные и нестандартные решения.

Первым шагом, который может помочь в реализации этих целей, является участие в проектной работе.

Проект — это самостоятельное исследование по выбранной теме, которое может выполняться как индивидуально, так и группой учащихся. Здесь важно ваше желание проявить себя в качестве исследователя в работе именно над выбранной темой.

Дадим несколько советов по организации работы над проектом и оформлению результатов исследования.

1. При выборе темы необходимо учитывать её актуальность, наличие источников информации: необходимой литературы и интернет-ресурсов.
2. Работа начинается с составления предварительного плана, в котором отражается замысел и этапы реализации задуманного. После знакомства с основными источниками при помощи руководителя проекта составляется окончательный план.
3. Важно чётко сформулировать цели исследования. Они могут быть записаны в такой форме: изучить, описать, проанализировать, доказать, сравнить и т. п.
4. Работа завершается подведением итогов исследования, делаются выводы, намечаются перспективы дальнейшего изучения темы.
5. Примерный объём работы — 10–15 страниц. Дополнительно может прилагаться иллюстративный материал.
6. Работа может быть оформлена в виде реферата, доклада, компьютерной презентации.

Ниже приводится рекомендуемый список тем, которые могут быть выбраны для проектной работы.

1. Принцип Кавальери

Рекомендуемая литература

Понарин Я. П. Элементарная геометрия: в 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — М.: МЦНМО, 2006.

Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.

Рабинович В. Л. Вычисление объёмов с помощью принципа Кавальери // Квант. — 1976. — № 6.

2. **История возникновения дифференциального и интегрального исчислений**

Рекомендуемая литература

Рыбников К. А. История математики: в 2 ч. — М.: Московский ун-т, 1960.

Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. — М.: Знание, 1985.

3. **Метод Кардано для решения кубических уравнений**

Рекомендуемая литература

Клумова И., Фукс Д. Формула существует, но... // Квант. — 1976. — № 9.

4. **Выпуклые функции и доказательство неравенств**

Рекомендуемая литература

Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.

Ижболдин О., Курляндчик Л. Неравенство Йенсена // Квант. — 2000. — № 4.

Седракян Н. М., Авоян А. М. Неравенства. Методы доказательства. — М.: Физматлит, 2002.

Соловьёв Ю. П. Неравенства. — М.: МЦНМО, 2005.

Шкапенюк М. Выпуклость функций и доказательство неравенств // Квант. — 1980. — № 3.

5. **Применение комплексных чисел в геометрии**

Рекомендуемая литература

Глазков Ю. А., Варшавский И. К., Гиашвили М. Я. Комплексные числа. — М.: Экзамен, 2012.

Понарин Я. П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. — М.: МЦНМО, 2004.

Розенфельд Б. А. Неевклидовы геометрии. — М., 1955.

Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

6. **Дифференциальные уравнения как математическая модель процессов**

Рекомендуемая литература

Арнольд В. И. Эволюционные процессы и обыкновенные дифференциальные уравнения // Квант. — 1986. — № 2.

Вышенский В., Перестюк Н., Самойленко А. Поговорим о дифференциальных уравнениях // Квант. — 1980. — № 1.

Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих. — М.: Физматлит, 2010.

Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. Основной принцип дифференциального исчисления // Квант. — 1988. — № 4.

7. А. Н. Колмогоров — выдающийся российский математик XX столетия

Рекомендуемая литература

Розов Н. Х., Тихомиров В. М. Явление чрезвычайное. Книга о Колмогорове. — М.: Фазис, 1999.

Колмогоров в воспоминаниях учеников: сб. ст. / ред.-сост. А. Н. Ширяев. — М.: МЦНМО, 2006.

Колмогоров в воспоминаниях / ред.-сост. А. Н. Ширяев. — М.: Изд. фирма «Физ.-мат. литература»: ВО «Наука», 1993.

8. Бином Ньютона и треугольник Паскаля. Свойства биноминальных коэффициентов

Рекомендуемая литература

Виленкин Н. Я. Комбинаторика. — М.: Наука, 1969.

Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977.

Кузьмин О. В. Обобщённые пирамиды Паскаля и их приложения. — Новосибирск: Наука. Сибирская издательская фирма РАН, 2000.

Прасолов В. В. Задачи по алгебре, арифметике и анализу. — М.: МЦНМО, 2007.

Спивак А. В. Арифметика. — М.: Бюро Квантум, 2007.

Успенский В. А. Треугольник Паскаля. — М.: Наука, 1979.

9. Зависимые случайные величины

Рекомендуемая литература

Босс В. Лекции по математике. Т. 4: Вероятность, информация, статистика. — М.: КомКнига, 2005.

Буренин А. Н. Управление портфелем ценных бумаг. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Науч.-техн. о-во им. С. И. Вавилова, 2007. — (Серия «Теория и практика финансового рынка»).

Кимбл Г. Как правильно пользоваться статистикой / пер. с англ. Б. И. Клименко; предисл. Н. К. Дружинина. — М.: Финансы и статистика, 1982. — (Б-чка иностр. книг для экономистов и статистиков).

Колде Я. К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для техникумов. — М.: Высш. шк., 1991.

Ниворожкина Л. И. и др. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: руководство для решения задач. — Ростов н/Д: Феникс, 1999.

Теория вероятностей и математическая статистика: Шпаргалка. — М.: РИОР, 2010.

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО, 2008.

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика: экспер. уч. пос. для 10 и 11 кл. общ. учр. — М.: МЦНМО, 2014.

10. Нормальное и показательное распределения

Рекомендуемая литература

Боровиков В. Statistica. Искусство анализа данных на компьютере. — 2-е изд. — СПб. и др.: Питер: Питер Принт, 2003 (СПб.: ГПП Печ. двор им. А. М. Горького). — 688 с. + CD-ROM. — (Для профессионалов).

Бродский И. Л., Мешавкина О. С. Вероятность и статистика. 10–11 классы. Планирование и практикум: пособие для учителя. М.: Аркти, 2009. — (Школьное образование).

Бродский Я. С. Статистика. Вероятность. Комбинаторика. — М.: Издательство Оникс: Мир и Образование, 2008. — (Школьный курс математики).

Бунимович Е. А., Булычёв В. А. Вероятность и статистика в курсе математики общеобразовательной школы: лекции 5–8. — М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2005.

Ниворожкина Л. И. и др. Основы статистики с элементами теории вероятностей для экономистов: руководство для решения задач. — Ростов н/Д: Феникс, 1999.

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. — М.: МЦНМО, 2008.

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика: экспер. уч. пос. для 10 и 11 кл. общ. учр. — М.: МЦНМО, 2014.

11. Элементы теории графов

Рекомендуемая литература

Гуровиц В. М., Ховрина В. В. Графы. — 4-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2014. — (Школьные математические кружки. Вып. 2).

Коннов В. В. и др. Геометрическая теория графов. — М.: Народное образование, 1999.

Мельников О. И. Теория графов в занимательных задачах. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.

Мир математики: в 40 т. — Т. 11: Клауди Альсина. Карта метро и нейронные сети. Теория графов/пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2014.

Оре О. Графы и их применение / пер. с англ. Л. И. Головиной и В. А. Белавина с 4-го изд., испр. и доп.; под ред. Р. Уилсона. — М.: УРСС: ЛЕНАНД, 2014. — (Шедевры научно-популярной литературы. Математика. Вып. 87).

12. Гипергеометрическое распределение и его свойства

Рекомендуемая литература

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — 12-е изд., перераб. — М.: Юрайт: Высш. образование, 2009. — (Основы наук).

Кремер Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: ЮНИТИ, 2012. — (Золотой фонд российских учебников).

Левин Д. М. и др. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel/пер. с англ. — 4-е изд. — М.: ИД «Вильямс», 2004.

Лютикас В. С. Факультативный курс по математике: Теория вероятностей: учеб. пособие для 9–11 кл. сред. шк. — 3-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1990.

13. Совместные наблюдения двух случайных величин. Линейная регрессия и ранговая корреляция

Рекомендуемая литература

Деринфельд Г. И. Интерполирование и способ наименьших квадратов. — Киев: Вища шк. Головное изд-во, 1984. — (Б-чка физ.-мат. школы. Математика).

Кельберт М. Я., Сухов Ю. М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. — Т. 1: Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. — М.: Изд-во МЦНМО, 2007.

Левин Д. М. и др. Статистика для менеджеров с использованием Microsoft Excel/пер. с англ. — 4-е изд. — М.: ИД «Вильямс», 2004.

Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. — СПб: Речь, 2010.

14. Характеристики непрерывных случайных величин

Рекомендуемая литература

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — 12-е изд., перераб. — М.: Юрайт: Высш. образование, 2009. — (Основы наук).

Колмогоров А. Н. и др. Введение в теорию вероятностей. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука: Изд. фирма «Физ.-мат. лит.», 1995. — (Библиотечка «Квант». Вып. 23).

Тюрин Ю. Н. и др. Теория вероятностей и статистика. — 3-е изд., стер. — М.: Изд-во МЦНМО, 2011.

Шень А. Вероятность: примеры и задачи. — 4-е изд. , стер. — М.: Изд-во МЦНМО, 2016.

15. Центральная предельная теорема

Рекомендуемая литература

Спирина М. С., Спирин П. А. Теория вероятностей и математическая статистика. — 7-е изд., стер. — М.: Академия, 2016.

Фигурин В. А. Теория вероятностей и математическая статистика. — Минск: ООО «Новое знание», 2000.

16. Эмпирическое распределение и проверка гипотез

Рекомендуемая литература

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. — 12-е изд., перераб. — М.: Юрайт: Высш. образование, 2009. — (Основы наук).

Орлов А. И. Математика случая: Вероятность и статистика — основные факты: учеб. пособие. — М.: МЗ-Пресс, 2004.

17. Теорема Виета и симметрические многочлены

Рекомендуемая литература

Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. — 2-е изд. — М.: МЦНМО, 2002.

Курляндчик Л. Д., Фомин С. В. Теорема Виета и вспомогательный многочлен // Квант. — 1984. — № 12.

Дружим с компьютером

В этом учебном году вы систематизируете и усовершенствуете свои знания, позволяющие использовать компьютер в ходе изучения курса математики. Определяйте самостоятельно, какую техническую работу вы можете выполнять с помощью компьютера; каким образом представлять изучаемый материал в наглядном виде, иллюстрировать его таблицами и графиками. Рекомендуем также составлять алгоритмы для решения упражнений и программы на изучаемом языке программирования для их реализации. Ниже приведены задания, соответствующие изучаемым темам. Но этими заданиями далеко не ограничиваются возможности применения компьютера в курсе алгебры и начал анализа. Рекомендуем вам самостоятельно искать такие возможности и реализовывать их, особенно если вы выбираете профессию, связанную с информатикой и компьютерными науками.

Задания курса алгебры и начал анализа 11 класса для выполнения с помощью компьютера

Задания, содержащие элементы программирования, отмечены звёздочкой. В зависимости от уровня изучения информатики их можно выполнять, либо записывая алгоритм словами или в виде блок-схемы, либо реализуя эти алгоритмы в виде программ на изучаемом языке программирования.

Наиболее сложные задания отмечены восклицательным знаком.

К § 1 «Степень с произвольным действительным показателем. Показательная функция»

1.1. Приведите примеры из физики, биологии, экономики, в которых некоторый процесс описывается показательной функцией. Промоделируйте эти процессы с помощью табличного редактора; постройте графики.

1.2. Есть ли в микрокалькуляторе, в стандартной программе «Калькулятор» на компьютере, в изучаемом вами языке программирования возможность вычисления a^x?

К § 2 «Показательные уравнения»

2.1.!* Пользуясь определением степени с действительным показателем, запишите алгоритм для нахождения решения уравнения $a^x = b$ для заданных $a > 0$ и $b > 0$. Считайте, что искомое решение найдено, если a^x отличается от b менее чем на 0,01.

К § 3 «Показательные неравенства»

3.1.!* Пользуясь определением степени с действительным показателем, запишите алгоритм для нахождения решения неравенств $a^x < b$ и $a^x > b$ для заданных $a > 0$ и $b \in \boldsymbol{R}$. Задайте точность, с которой надо выводить результирующие данные, как входной параметр алгоритма.

К § 4 «Логарифм и его свойства»

4.1. Найдите в микрокалькуляторе, в стандартной программе «Калькулятор» на компьютере, в изучаемом вами языке программирования средства для вычисления логарифма. По какому основанию вычисляется логарифм? Как использовать эти средства для вычисления логарифма по любому требуемому основанию?

К § 5 «Логарифмическая функция и её свойства»

5.1. Составьте в табличном редакторе таблицу значений логарифмических функций с разными основаниями и показательных функций, обратных к ним. Постройте графики этих функций на одном экране. Какие свойства этих функций иллюстрируют полученные графики?

К § 8 «Производные показательной и логарифмической функций»

8.1. Каким образом в микрокалькуляторе, в стандартной программе «Калькулятор» на компьютере, в изучаемом вами языке программирования задаётся число e? Есть ли средства для вычисления натурального логарифма? Каким образом при наличии только одного из этих инструментов выполнять действия, требующие второго из них?

К § 11 «Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл»

11.1.* Предположим, что у вас есть подпрограмма, позволяющая вычислить значение некоторой функции в любой точке. Каким образом вычислить определённый интеграл этой функции на заданном промежутке? (*Указание.* Воспользуйтесь идеей доказательства теоремы 11.1.)

Вычислите с помощью этой программы несколько интегралов из упражнений к § 11 и сравните результаты с результатами, полученными вами в ходе выполнения упражнений.

11.2. Найдите в Интернете информацию о численных методах интегрирования.

К § 12 «Вычисление объёмов тел»

12.1.*Напишите программу для вычисления объёма тела вращения. Какие требуются исходные данные и каким образом будет задана форма этого тела вращения?

К § 13 «Множество комплексных чисел»

13.1.*Каким образом можно представить комплексное число в изучаемом языке программирования? Напишите программу для выполнения операций, изученных в данном параграфе, с комплексными числами, представленными в алгебраической форме.

К § 14 «Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа»

14.1.*Составьте алгоритм для перевода комплексного числа из алгебраической формы в тригонометрическую и наоборот. Какие ограничения следует наложить на исходные данные?

К § 15 «Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Корень n-й степени из комплексного числа»

15.1.*Каким образом можно представить в изучаемом языке программирования комплексное число в тригонометрической форме? Напишите программу для выполнения операций, изученных в данном параграфе, с комплексными числами, представленными в тригонометрической форме.

К § 16 «Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел»

16.1.*Напишите программу для решения квадратного уравнения на множестве комплексных чисел.

16.2.*Найдите в Интернете информацию о численных методах решения уравнений на множестве комплексных чисел. Реализуйте какие-либо из этих методов.

К § 17 «Элементы комбинаторики и бином Ньютона»

17.1.*Напишите программу для получения набора биномиальных коэффициентов для заданного n. Сравните два возможных подхода: вычисление коэффициентов C_n^k и формирование строки треугольника Паскаля. Для какого значения n вычисление коэффициентов C_n^k станет невозможным из-за переполнения «целого» типа данных?

К § 18 «Аксиомы теории вероятностей»

18.1. С помощью каких инструментов можно описывать события и моделировать операции над событиями на компьютере?

18.2. Представьте испытание с n равновозможными результатами в виде таблицы из n строк в табличном редакторе. Как можно определять события с помощью этого инструмента? Проиллюстрируйте с помощью такого представления понятия, изученные в этом параграфе.

К § 19 «Условная вероятность»

19.1. Представьте дендрограмму с помощью табличного редактора; графического редактора. Можно ли автоматизировать заполнение надписей над стрелками дендрограммы?

19.2. Встречали ли вы в курсе информатики объекты, представленные в виде древовидной схемы? Что общего у этих объектов с дендрограммой? Как можно использовать навыки работы с этими объектами в изучаемом курсе?

К § 21 «Случайная величина»

21.1. Ознакомьтесь с понятием «датчик случайных чисел». Найдите в изучаемом языке программирования средства получения случайных чисел.

1) Сформируйте набор значений какой-то случайной величины с использованием датчика случайных чисел. Заполните этими значениями таблицу и постройте график. Есть ли какая-то закономерность в размещении точек графика?

2) В каких пределах находится случайная величина, выдаваемая датчиком случайных чисел?

3) Часто значение случайной величины находится в некотором диапазоне. Как надо использовать датчик случайных чисел для того, чтобы получить значение случайной величины из заданного диапазона?

К § 22 «Схема Бернулли. Биномиальное распределение»

22.1.* Напишите программу для вычисления вероятности в ситуациях, которые можно описать схемой Бернулли. Опишите применение этой программы в наиболее общем виде так, чтобы ею могли пользоваться в практических целях люди, не имеющие соответствующих теоретических знаний. Как с этой целью следует организовать диалог программы с пользователем?

К § 23 «Характеристики случайной величины»

23.1.* Напишите программу для вычисления математического ожидания, дисперсии, стандартного отклонения, среднего абсолютного отклонения случайной величины. Предусмотрите задание случайной величины всеми известными вам способами.

Ответы и указания

Глава 1. **1.15.** 1) $-6a^{\sqrt{5}} - 13$; 2) $\frac{1}{a^{2\sqrt{7}}}$; 3) $\frac{2a^{\sqrt{3}}}{a^{\sqrt{3}} + b^{\sqrt{2}}}$; 4) $2a^{\sqrt[3]{3}} - a^{2\sqrt[3]{3}}$. **1.16.** 1) $a^{\sqrt{6}} + 1$; 2) $4^{\frac{1}{\pi}}ab$. **1.17.** 1) Да; 2) да; 3) нет; 4) нет. **1.18.** 3) $(-4; +\infty)$; 4) $[1; +\infty)$. **1.19.** 36. **1.20.** $[-2; 4]$. **1.22.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[0; +\infty)$. **1.23.** $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. **1.28.** 1) Корней нет; 2) 3 корня; 3) бесконечно много корней; 4) 2 корня. **1.29.** 1) 1 корень; 2) бесконечно много корней; 3) 2 корня. **1.32.** *Указание*. Найдите область определения данной функции. **1.33.** 1) 4; $\frac{1}{4}$; 2) 1; -1. **1.34.** 1) 6; $\frac{1}{6}$; 2) 6; $5\frac{1}{5}$. **1.35.** 1) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\}$; 2) $[-1; 1]$; 3) $[-1; 1]$. **1.36.** 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $[-1; 1]$; 3) $\{x \in \boldsymbol{R} \mid x \neq \pi k, k \in \boldsymbol{Z}\}$. **1.37.** 2) См. рисунок. **1.39.** $(7 + 4\sqrt{3})^{-5,2} > (7 - 4\sqrt{3})^{5,6}$. *Указание*. Числа $7 + 4\sqrt{3}$ и $7 - 4\sqrt{3}$ являются взаимно обратными. **1.42.** 1) 0. *Указание*. $2^{\cos x} \leqslant 2$, $x^2 + 2 \geqslant 2$; 2) 0. **1.43.** 1) 0; 2) 0. **1.44.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $\{0\}$; 3) $[0; +\infty)$. **1.45.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) $\{0\}$. **1.46.** Нечётная. **1.47.** Нечётная. **1.48.** Чётная. **1.49.** Нечётная. **1.50.** $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. *Указание*. Выясните, при каких значениях параметра a уравнение $\frac{t-1}{t-4} = a$ имеет хотя бы один положительный корень. **1.51.** $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$. **1.52.** Да. *Указание*. Имеет место равенство $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — число рациональное, то $a = b = \sqrt{2}$. Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — число иррациональное, то $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$.

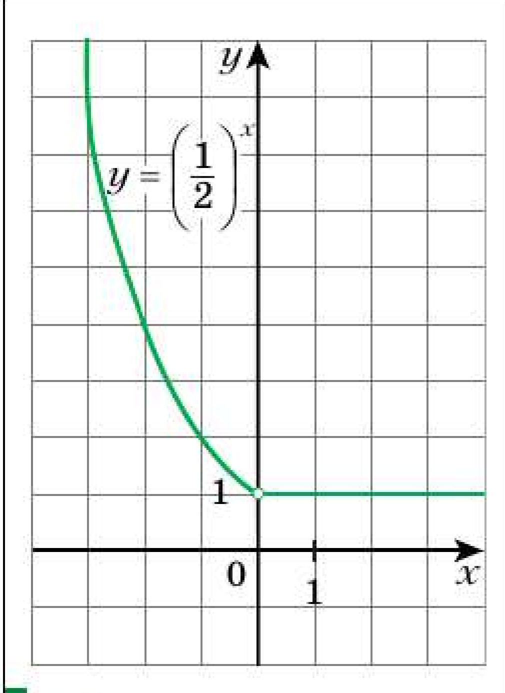


Рис. к задаче 1.37 (2)

2.3. 1) 1; 2) 3; 3) 3; 4) 1; 5) 3; 6) 2. **2.4.** 1) 2; 2) 4; 3) 1; 4) 3. **2.5.** 1) 1; 2; 2) 2; 3) 1; 4) 2. **2.6.** 1) 1; 2) -1; 2. **2.7.** 1) $-\frac{1}{3}$; 2) 1; 3) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $-\frac{2}{3}$; 2; 5) -2; 6) $\frac{1}{10}$. **2.8.** 1) $-\frac{5}{2}$; $\frac{1}{4}$; 2) $(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 6,5. **2.9.** 1) 5; 2) 2; 3) 1; 4) 3; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 3; 7) 2; 8) 0; $\frac{1}{2}$. **2.10.** 1) 1; 2) 2; 3) 2; 4) $\frac{3}{2}$; 5) 4; 6) 0; $\frac{1}{3}$. **2.11.** 1) -1; 1; 2) $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 1; 5) -1; 2; 6) 1. **2.12.** 1) -1; 1; 2) 1; 2; 3) 1; 4) -1; 5) 0; 6) 2. **2.13.** 1) 2; 2) -1; 1; 3) 2. **2.14.** 1) 2; 2) 3; 3) 4. **2.15.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) 3; -3; 3) 3; 4) 6; 5) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 6) $\frac{\pi}{4}$ +

$+\frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$; 7) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.16.** 1) 1; 2) 3; 3) πn, $n \in \mathbf{Z}$. **2.17.** 1) 0; 1; 2) 0; –1; 3) –1; 4) 0. **2.18.** 1) 0; 1; 2) 0; 2. **2.19.** 2. **2.20.** 0. **2.21.** –2; 2. *Указание*. Числа $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$ являются взаимно обратными. **2.22.** –2; 2. **2.23.** 1) –1; 0; 1. *Указание*. Пусть $2^x+\frac{1}{2^x}=t$. Тогда $4^x+\frac{1}{4^x}=\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^2-2\cdot 2^x\cdot\frac{1}{2^x}=t^2-2$; 2) –1; 0; 1. **2.24.** $(-\infty; 2]\cup\{5\}$. **2.25.** $[-2; 3]$. **2.26.** $(1; 3)\cup(3; +\infty)$. **2.27.** 1) 1; 2) 2; 3) 5; 4) 3. **2.28.** 1) 2; 2) 4; 3) 5; 4) 3. **2.29.** $(-\infty; 0]\cup\{1\}$. **2.30.** $(-\infty; 0)\cup\{1, \sqrt{3}\}$. **2.31.** 1; 3. **2.32.** 1; 2. **2.33.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Если $\operatorname{tg} x \leqslant 0$, то уравнение не имеет решений. Если $\operatorname{tg} x > 0$, то $4^{\operatorname{tg} x}+4^{\operatorname{ctg} x}\geqslant 2\sqrt{4^{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}}\geqslant 2\sqrt{4^2}$. **2.34.** $\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. **2.35.** $a=-1$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что если это уравнение имеет корень x_0, то оно имеет корень $-x_0$. **2.36.** $a=1$. **2.37.** $a=-1$. **2.38.** $a=-2$. **2.39.** $[0; 9]\cup\{-9\}$. *Указание*. Несложно установить, что $x=0$ — единственный корень первого уравнения. Подставим его во второе уравнение. Имеем: $|a-9|\cdot 3^{-2}+a\cdot 9^{-1}=1$; $|a-9|=9-a$. Отсюда искомое значение параметра следует искать среди решений неравенства $a\leqslant 9$. **2.40.** $[0; 4]\cup\{-4\}$. **3.4.** 1) 5; 2) 3; 3) 4. **3.5.** 1) –5; 2) 7. **3.6.** 1) $[0; +\infty)$; 2) $(1; +\infty)$. **3.7.** 1) $(-\infty; -2]$; 2) $(-\infty; 4]$. **3.8.** 1) $(-\infty; 1)\cup(5; +\infty)$; 2) $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$; 3) $(-5; -3)\cup(3; +\infty)$; 4) $(-\infty; 0)$; 5) $(0; 4]$; 6) $[-1; 2]$. **3.9.** 1) $(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; -2]\cup\left[\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -2)\cup(1; 2)$; 4) $(-1; +\infty)$. **3.10.** 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$; 3) $(5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -1]$; 5) $(-\infty; 0]$; 6) $(-\infty; 1)$. **3.11.** 1) $(-\infty; 2)$; 2) $[0; +\infty)$; 3) $(3; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$. **3.12.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $[0; 1]$; 4) $(-\infty; -3]\cup[-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 1]$; 6) $[1; +\infty)$. **3.13.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[6; +\infty)$; 3) $(-\infty; -1)\cup(0; +\infty)$; 4) $[0; 2]$. **3.14.** 1) $(-\infty; 2)\cup(2; 3]$; 2) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$. **3.15.** 1) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)\cup\left(-\frac{2}{3}; 2\right]$; 2) $[-2; 5)$. **3.16.** 1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 2) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. **3.17.** 1) $(0; 1)$; 2) $\left(-\infty; \frac{7}{4}\right]$. **3.18.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-3; 1)$; 3) $(-\infty; -2]\cup[0; +\infty)$; 4) $\{0\}$. **3.19.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$. **3.20.** $[0; 1]$. **3.21.** $[0; 4]$. **3.22.** 1) $(0; 1)$; 2) $(-\infty; -1]\cup(0; +\infty)$. **3.23.** 1) $\left(0; \frac{1}{2}\right)$; 2) $(-\infty; 0)\cup(0; 1]$. **3.24.** 1) $(-1; 0)\cup(1; +\infty)$; 2) $(0; 2)$. **3.25.** $(-\infty; -3)\cup(0; 3)$. **3.26.** $[0; 2]$. **3.27.** $[0; 1]$. **3.28.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $(2; +\infty)$.

3.29. $(-\infty; 3)$. **3.30.** $[3; +\infty) \cup \{-2\}$. **3.31.** $(-\infty; -2] \cup \{4\}$. **3.32.** Если $a \geqslant 1$, то $x = 1$; если $a < 1$, то $x \in [a; 1]$. **3.33.** Если $a < 1$, то $x \in (-\infty; a] \cup \{1\}$; если $a \geqslant 1$, то $x \in (-\infty; 1]$. **3.34.** $a < \frac{19}{3}$. **3.35.** $m > -1{,}5$. **4.21.** 4) 144; 5) 64; 6) 1; 7) 0; 8) 48. **4.22.** 4) 9; 5) 10; 7) 2. **4.23.** 1) -3; 2) -1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) $-\frac{1}{4}$. **4.24.** 1) 1; 2) -1; 3) 0; 4) -1. **4.25.** 1) 4; 2) 60; 3) 180; 4) 20; 5) 0,1. **4.26.** 1) 72; 2) $\frac{1}{4}$; 3) 10. **4.27.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3. **4.28.** 1) -5; 2) -2. **4.29.** 1) 2; 2) 4. **4.30.** 1) 6; 2) 9. **4.31.** 30. **4.32.** 21. **4.33.** $\log_a b$. **4.34.** $\log_b a$. **4.37.** 1) $-1 < x < 1$; 2) $x \neq 1$; 3) $x < 2$; 4) $x \neq 2$. **4.38.** 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0. **4.39.** $\lg 2$. *Указание*. В каждом из логарифмов перейдите к основанию 10. **4.40.** $\frac{5}{2}$. **4.46.** $\frac{\log_a x \cdot \log_b x}{\log_a x + \log_b x}$. *Указание*. $\log_x ab = \log_x a + \log_x b = \frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x}$. **4.47.** *Указание*. В выражении $\log_{ab} x$ перейдите к логарифму с основанием a. **4.48.** -3. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что $\log_{ab} b + \log_{ab} a = 1$. **4.49.** $\frac{2a + b + 1}{2b + 1}$. **4.50.** 1) $\frac{2(2a - 1)}{3(2 - a)}$; 2) $\frac{a + b}{1 - a}$. **4.51.** $\frac{3 - 3a}{b + 1}$. **5.19.** 1) $2 < \log_3 10 < 3$; 2) $2 < \log_2 5 < 3$; 3) $-2 < \log_{\frac{1}{3}} 7 < -1$; 4) $-1 < \log_{0,1} 2 < 0$. **5.20.** 1) $4 < \log_2 29 < 5$; 2) $-4 < \log_{\frac{1}{3}} 9 < -3$. **5.21.** 1) $\log_4 5 > \log_5 4$; 2) $\log_{1,5} 1{,}3 < \log_{1,3} 1{,}5$; 3) $\log_{0,7} 0{,}8 < \log_{0,8} 0{,}7$; 4) $\log_{0,2} 0{,}1 > \log_{0,1} 0{,}2$. **5.23.** 1) $(0; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $(-\infty; 9) \cup (9; 10)$; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.24.** 1) $(-3; -2) \cup (-2; +\infty)$; 2) $2\pi n < x < \pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **5.27.** 1) 2; 2) 1; 3) $\frac{1}{2}$. **5.28.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 3. **5.29.** 1) 1 корень; 2) 1 корень; 3) 1 корень. **5.30.** 1) 1 корень; 2) 1 корень. **5.31.** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$. *Указание*. Числа $\log_2 3$ и $\log_3 2$ являются положительными и взаимно обратными. **5.33.** 1) Все действительные числа, кроме чисел вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\{0\}$; 3) все числа вида $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 4) $(3; 4) \cup (4; 6]$; 5) $[-1; 0) \cup (0; 3]$; 6) $(-\infty; 1) \cup (3; 6) \cup (6; 7)$; 7) $(0; 2) \cup (2; 3)$; 8) $(-3; -2) \cup (-2; -1) \cup (0; +\infty)$. **5.34.** 1) $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$; 2) все действительные числа, кроме чисел вида $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\boldsymbol{R}$; 4) все числа вида $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 5) $(-8; -2) \cup (-2; -1)$; 6) $(0; 7) \cup (7; 8)$; 7) $(-2; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; 2)$; 8) $(0; 4) \cup (4; 5)$;

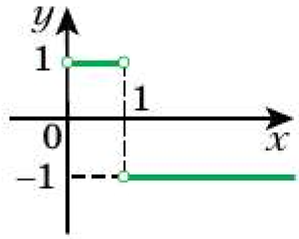


Рис. к задаче 5.35 (3)

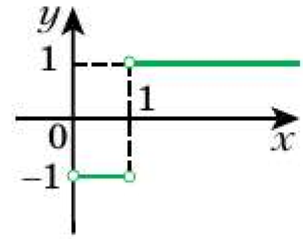


Рис. к задаче 5.35 (4) и 5.36 (3)

9) $(-1;\ 1) \cup (1;\ 2)$; 10) $[-5;\ 0) \cup (0;\ 2]$. **5.35.** 3) См. рисунок; 4) см. рисунок. **5.36.** 3) См. рисунок. **5.37.** 1) –2; 2) –1. **5.38.** 1) 3; 2) 1. **5.39.** Нечётная. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $\sqrt{x^2+1} - x = (\sqrt{x^2+1} + x)^{-1}$. **5.41.** (–2; 2). **5.42.** $\left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3};\ +\infty\right)$. **5.43** $\log_2 3 < \log_3 7$. *Указание.* Докажите неравенство $\log_2 3 < \frac{5}{3} < \log_3 7$. **6.5.** 1) 16; 2) 64; 3) 6; 4) 6; 5) 512. **6.6.** 1) $\frac{1}{9}$; 2) 5; 3) 10^{10}. **6.7.** 1) 0,8; 2) 2; 3) 0; 4) –1. **6.8.** 1) 1; 2) 0; 1. **6.9.** 1) –2; 6; 2) 5; 3) корней нет; 4) –2; 5) 1; 6) –1; 7) 0; 8) 6. **6.10.** 1) –2; 2) корней нет; 3) 0; 13; 4) –2. **6.11.** 1) 7; 2) 1; 3) 1; 4) 2. **6.12.** 1) 3; 2) $\log_2 3$; 3) 2. **6.13.** 1) 4; 2) 2; 3; 3) 4; 4) 5; 5) 8; 6) 4; 7) 4; 8) 7. **6.14.** 1) 1; 2) 2; 3) $\frac{3}{4}$; 4) –1; 4; 5) 3; 6) 8. **6.15.** 1) $\log_5 4$; 2) 0. **6.16.** 1) 2; 2) $\log_3(3+\sqrt{11})$. **6.17.** 1) 2; $\frac{1}{16}$; 2) 9; $\frac{1}{3}$; 3) 10; 1000; 4) 25; $\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 8; $10^7 - 2$. **6.18.** 1) –8; $-\frac{1}{2}$; 2) 343; $\frac{1}{49}$; 3) 27; $\sqrt[3]{3}$; 4) $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **6.19.** 1) 7; 2) корней нет; 3) 3; 4; 4) 1; 5) 4. **6.20.** 1) Корней нет; 2) 5; 3) 4; 4) 3; 5) 3. **6.21.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) –5; –2; $\frac{\sqrt{89}-7}{2}$. **6.22.** 1) –6; –4; 2; 2) –1; 2; 3. **6.23.** 1) $\frac{1}{3}$; $3^{\frac{5}{9}}$; 2) 0,1; $\sqrt{10}$; 3) 4; 4) 8; $\frac{1}{8}$; 5) 100; 10^{-8}; 6) 5; $\frac{1}{625}$; 7) 10; 8) 10 000. **6.24.** 1) $\sqrt[3]{10}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; 2) 3; 9; 3) 1; 49; 4) 100; $\frac{1}{100}$; 5) 6; 6^{-7}; 6) 32. **6.25.** 1) $\frac{1}{5}$; 5; 2) 0,001; 10; 3) 3; 9; 4) 216; $\frac{1}{6}$. **6.26.** 1) $\frac{1}{9}$; 9; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 16; $\frac{1}{4}$; 4) 1 000 000; 0,001. **6.27.** 1) 2; 2) $\frac{1}{4}$; 4; 3) $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$; 4) 1; 9; 5) 1; 16; 6) $\frac{1}{2}$. **6.28.** 1) $\frac{1}{9}$; 3; 2) $\sqrt{3}$; 3; 3) 7; 4) 3. **6.29.** 1) $\sqrt{3}$; 2) $\frac{1}{625}$; 5; 3) $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$. **6.30.** *Указание.* Рассмотрите произведение $\log_a x \cdot \log_a y$. Воспользовавшись теоремой 4.3,

можно записать: $\log_a x \cdot \log_a y = \log_a y^{\log_a x}$ или $\log_a y \cdot \log_a x = \log_a x^{\log_a y}$. Отсюда $\log_a y^{\log_a x} = \log_a x^{\log_a y}$; $y^{\log_a x} = x^{\log_a y}$. **6.31.** 1) 1000; 2) $3^{\sqrt{2}}$; $3^{-\sqrt{2}}$. **6.32.** 1) 4; 2) $\frac{1}{7}$; 7. **6.33.** 1) (1; 3); 2) (9; 3), (3; 9); 3) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 4) (3; 9), (9; 3); 5) $\left(2; \frac{1}{2}\right)$; 6) (2; 10), (10; 2). **6.34.** 1) (1,5; 2); 2) (8; 2), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right)$; 3) (5; 5); 4) (1; 1), $\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{3}; \frac{2\sqrt[3]{6}}{3}\right)$; 5) (4; 1). **6.35.** 1) –1; 2) $\frac{1}{4}$; 2. *Указание*. Рассмотрите данное уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$. **6.36.** 1) 8; 2) 3; $\frac{1}{27}$. **6.37.** 3; $\sqrt{2}$. **6.38.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 1,5. **6.39.** 1) 2; 2) корней нет. **6.40.** 1) 1; 2) 3. **6.41** $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}) \cup \{1\}$. **6.42.** Если $a \leqslant -1$ или $a \geqslant 7$, то одно решение; если $-1 < a < 7$, то два решения. **6.43.** Если $a \leqslant 2$ или $a \geqslant 11$, то одно решение, если $2 < a < 11$, то два решения. **6.44.** $a = \frac{8}{3}$ или $a \leqslant \frac{7}{3}$. **6.45.** $a = -3$ или $a \geqslant -2{,}5$. **6.46.** 1) n, где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.47.** 1) $1 + 4n$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **6.48.** 2. **6.49.** 2. **6.50.** (2; 2). *Указание*. Рассмотрите функцию $f(t) = \sqrt{t} + \log_8 t$. **6.51.** 1; 3. **6.52.** Нет. *Указание*. Число $x = \frac{1}{4}$ также является корнем данного уравнения. Рисунок 6.3 не может служить обоснованием того, что данное уравнение имеет один корень. В этом и состоит ошибка ученика. На самом деле можно показать, что данное уравнение имеет три корня. Построив, например, с помощью компьютерной программы графики функций $y = \left(\frac{1}{16}\right)^x$, $y = \log_{\frac{1}{16}} x$ на промежутке $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, можно увидеть наличие этих трёх корней. **7.5.** 1) 21; 2) 26. **7.6.** 1) 0; 2) 0; 1; 2; 3; 4; 5. **7.7.** 1) $(1; +\infty)$; 2) (0; 1); 3) $(3; +\infty)$; 4) $(-3; -2) \cup (3; +\infty)$; 5) $(-\infty; -3] \cup [4; 9)$; 6) $\left(-\frac{11}{10}; 4\right] \cup [5; +\infty)$. **7.8.** 1) $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$; 2) $\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{2}\right)$; 3) $[5; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [3; 5)$. **7.9.** 1) 6; 2) 2; 3) 2; 4) 5. **7.10.** 1) –1; 2) 3; 3) 1; 4) 0. **7.11.** 1) $[-1; 1) \cup (3; 5]$; 2) $(-2; -1) \cup (0; 1)$; 3) $(-6; -5) \cup (-5; -4)$; 4) $[-1; 0) \cup (3; 4]$; 5) $\left(-\infty; -\frac{7}{4}\right)$; 6) $\left(\frac{5}{4}; 2\right) \cup (2; +\infty)$; 7) $(-\infty; -2{,}5) \cup [2; +\infty)$; 8) $\left(\frac{1}{3}; 1\right]$. **7.12.** 1) (2; 3); 2) $[1; 2) \cup (4; 5]$; 3) $[-4; -3) \cup$

$\cup (0;\ 1]$; 4) $[0;\ 1) \cup (1;\ 2]$; 5) $\left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup [3;\ +\infty)$; 6) $\left(\frac{1}{2};\ 3\right)$. **7.13.** 1) $(3;\ 6]$; 2) $(1;\ 3]$; 3) $\left(\frac{1}{2};\ 1\right)$; 4) $\left(-2;\ -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{2};\ +\infty\right)$; 5) $[-4;\ -3) \cup (1;\ 3]$; 6) $[-5;\ -1) \cup \left(-\frac{1}{2};\ 0\right]$. **7.14.** 1) $(-3;\ -1)$; 2) $(4;\ 5]$; 3) $(-5;\ 7]$; 4) $\left[0;\ \frac{1}{2}\right) \cup (4;\ 13]$. **7.15.** 1) $(5;\ +\infty)$; 2) $(1;\ +\infty)$; 3) $(0;\ 4)$; 4) $(5;\ 7]$; 5) $\left(-1;\ -\frac{3}{5}\right]$; 6) $\left(-\infty;\ -\frac{7}{5}\right]$. **7.16.** 1) $[-1;\ 0)$; 2) $(1;\ 2]$; 3) $[11;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{14}{3};\ +\infty\right)$. **7.17.** 1) $\left[\frac{1}{5};\ 5\right]$; 2) $\left(0;\ \frac{1}{9}\right] \cup [9;\ +\infty)$; 3) $(0{,}0001;\ 10)$; 4) $\left[\frac{1}{16};\ 256\right]$; 5) $(0;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$; 6) $\left(0;\ \frac{1}{81}\right] \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. **7.18.** 1) $\left(0;\ \frac{1}{8}\right] \cup [8;\ +\infty)$; 2) $(0;\ 0{,}1] \cup [1000;\ +\infty)$; 3) $(0{,}5;\ 4)$; 4) $[0{,}04;\ 5]$. **7.19.** 1) $\left(\frac{1}{128};\ 2\right)$; 2) $(0;\ 3^{-10}] \cup [3;\ +\infty)$; 3) $[0{,}001;\ 1) \cup [100;\ +\infty)$; 4) $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right] \cup (1;\ 5]$. **7.20.** 1) $\left(0;\ \frac{1}{49}\right] \cup [7;\ +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{216};\ 6\right]$; 3) $(3;\ 9] \cup [81;\ +\infty)$; 4) $\left[\frac{1}{4};\ 1\right) \cup [2;\ +\infty)$. **7.21.** 1) $\left[\frac{1-\sqrt{27}}{2};\ -2\right) \cup \left(3;\ \frac{1+\sqrt{27}}{2}\right]$; 2) $\left(-\infty;\ -\frac{3}{2}\right) \cup (1;\ +\infty)$; 3) $[1{,}5;\ +\infty)$; 4) $(3;\ +\infty)$. **7.22.** 1) $[-2;\ 1-\sqrt{5}) \cup (1+\sqrt{5};\ 4]$; 2) $\left(\frac{3}{4};\ 1\right)$. **7.23.** 1) $(2;\ 3)$; 2) $(4{,}5;\ 5)$; 3) $(0;\ 2)$; 4) $(3{,}5;\ 5)$; 5) $(0;\ 1) \cup [2;\ +\infty)$; 6) $(1{,}5;\ 2]$. **7.24.** 1) $\left(\frac{2}{3};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty)$; 2) $(1;\ 3) \cup (4;\ +\infty)$; 3) $(1;\ 2) \cup (2{,}5;\ 4)$; 4) $(1;\ 2]$. **7.25.** $\left[\log_5 \frac{1}{2};\ 1\right)$. **7.26.** $\left[\log_3 \frac{11}{20};\ 3\right)$. **7.27.** 1) $(3;\ 4] \cup \{5\}$; 2) $\left[-\frac{9}{8};\ -1\right) \cup \{2,\ -2\}$; 3) $\left[\frac{9}{5};\ 2\right) \cup (2;\ 3] \cup \{1\}$. **7.28.** 1) $(2;\ 3] \cup \{5\}$; 2) $(5;\ +\infty) \cup \{4\}$. **7.29.** Если $a \leqslant 8$, то $x \in [3;\ +\infty)$; если $a > 8$, то $x \in [\log_2 a;\ +\infty) \cup \{3\}$. **7.30.** Если $a \leqslant 9$, то $x = 2$; если $a > 9$, то $x \in [2;\ \log_3 a]$. **7.31.** $(0;\ 1) \cup \left[\pi;\ \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6};\ 2\pi\right)$. **7.32.** $(0;\ 1) \cup \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3};\ \frac{3\pi}{2}\right]$. **7.33.** 1) $[-2;\ +\infty)$. *Указание*. Воспользуйтесь неравенствами $\sqrt{x+2}+1 \geqslant 1$ и $\log_3(x^2+4x+13) \geqslant 2$. **7.34.** $[1; +\infty)$. **8.5.** 1) 0; 2) -2; 3) $-15\ln 3$. **8.6.** 1) 1; 2) 1; 3) $-5\ln 4$. **8.7.** 1) -1; 2) 3,5; 3) $-\frac{5}{2\ln 5}$; 4) $\frac{1}{2}$. **8.8.** 1) $\frac{6}{13}$; 2) 16; 3) $-\frac{1}{2\ln 10}$; 4) $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. **8.9.** 1) $\frac{2}{e}$; 2) $\frac{2}{3}$. **8.10.** 1) -1; 2) $\frac{1}{\ln 5}$. **8.11.** 1) $y=-2x+1$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=(2+2\ln 2)\,x-2\ln 2$; 4) $y=18x\ln 6+18\ln 6+6$; 5) $y=4x-1$; 6) $y=4x+4$; 7) $y=\frac{2x}{3\ln 3}-\frac{2}{3\ln 3}+1$; 8) $y=x-4+2\ln 2$. **8.12.** 1) $y=5x+1$; 2) $y=2x+1$; 3) $y=6x\ln 3-12\ln 3+3$; 4) $y=4x-\ln 4$; 5) $y=3x-6$; 6) $y=\frac{x}{4\ln 2}-\frac{1}{4\ln 2}+2$. **8.13.** 1) $y=2$; 2) $y=-1$. **8.14.** $y=-1600$. **8.15.** 1) $y=ex$; 2) $y=5x+3$; 3) $y=-x+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}$; 4) $y=3x-3$. **8.16.** 1) $y=-7x+7$; 2) $y=2x$; 3) $y=x+1+\ln 5$; 4) $y=-x$. **8.17.** 1) Возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min}=0$; 2) возрастает на $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right]$, $x_{\min}=-\frac{1}{2}$; 3) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $x_{\max}=0$; 4) возрастает на $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$, убывает на $(-\infty; 0]$ и $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$, $x_{\min}=0$, $x_{\max}=\frac{2}{\ln 2}$; 5) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max}=1$; 6) возрастает на $[0; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0]$, $x_{\min}=0$; 7) возрастает на $(-\infty; 2]$, убывает на $[2; +\infty)$, $x_{\max}=2$; 8) возрастает на $[3; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2)$ и $(2; 3]$, $x_{\min}=3$; 9) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max}=1$; 10) возрастает на $[e^{-\frac{1}{3}}; +\infty)$, убывает на $(0; e^{-\frac{1}{3}}]$, $x_{\min}=e^{-\frac{1}{3}}$; 11) возрастает на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{\max}=1$; 12) возрастает на $[e^{-\frac{1}{2}}; +\infty)$, убывает на $(0; e^{-\frac{1}{2}}]$, $x_{\min}=e^{-\frac{1}{2}}$; 13) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{\min}=1$; 14) возрастает на $[e; +\infty)$, убывает на $(0; 1)$ и $(1; e]$, $x_{\min}=e$; 15) возрастает на $(0; e^2]$, убывает на $[e^2; +\infty)$, $x_{\max}=e^2$; 16) возрастает на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, $x_{\min}=-1$, $x_{\min}=1$; 17) возрастает на $(0; 1]$ и $[e; +\infty)$, убывает на $[1; e]$, $x_{\max}=1$, $x_{\min}=e$; 18) возрастает на $[\sqrt{10}; +\infty)$, убывает на $(0; \sqrt{10}]$, $x_{\min}=\sqrt{10}$. **8.18.** 1) Возрастает на $[-2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -2]$, $x_{\min}=-2$; 2) возрастает на $[-1; 0]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[0; 1]$, $x_{\max}=0$, $x_{\min}=-1$, $x_{\min}=1$; 3) возрастает на $[-1; 1]$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $[1; +\infty)$,

$x_{max} = 1$, $x_{min} = -1$; 4) возрастает на $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right]$, $x_{min} = -\frac{1}{4}$; 5) возрастает на $\left(-\infty; \frac{3}{\ln 3}\right]$, убывает на $\left[\frac{3}{\ln 3}; +\infty\right)$, $x_{max} = \frac{3}{\ln 3}$; 6) возрастает на $(-\infty; -2]$, убывает на $[-2; +\infty)$, $x_{max} = -2$; 7) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 8) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[1; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; 1\right]$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{min} = 1$; 9) возрастает на $(0; e]$, убывает на $[e; +\infty)$, $x_{max} = e$; 10) возрастает на $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1]$, $x_{min} = 1$; 11) возрастает на $\left(0; \frac{1}{e^2}\right]$ и $[e^2; +\infty)$, убывает на $\left[\frac{1}{e^2}; e^2\right]$, $x_{max} = \frac{1}{e^2}$, $x_{min} = e^2$; 12) возрастает на $\left[\frac{1}{10}; 1\right]$ и $[10; +\infty)$, убывает на $\left(0; \frac{1}{10}\right]$ и $[1; 10]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = \frac{1}{10}$, $x_{min} = 10$. **8.19.** 1) $e + 1$; $\frac{1}{e} - 1$; 2) e^2; 0; 3) 1; $\frac{1}{7}$; 4) $2\frac{1}{2}$; 2. **8.20.** 1) $\frac{1}{e^2}$; 0; 2) 125; $\frac{1}{5}$. **8.21.** См. рисунок. **8.22.** См. рисунок. **8.25.** $a \leqslant 0$. **8.26.** $a \geqslant 0$. **8.27.** $m \geqslant 0$. **8.28.** $a \leqslant 1$.

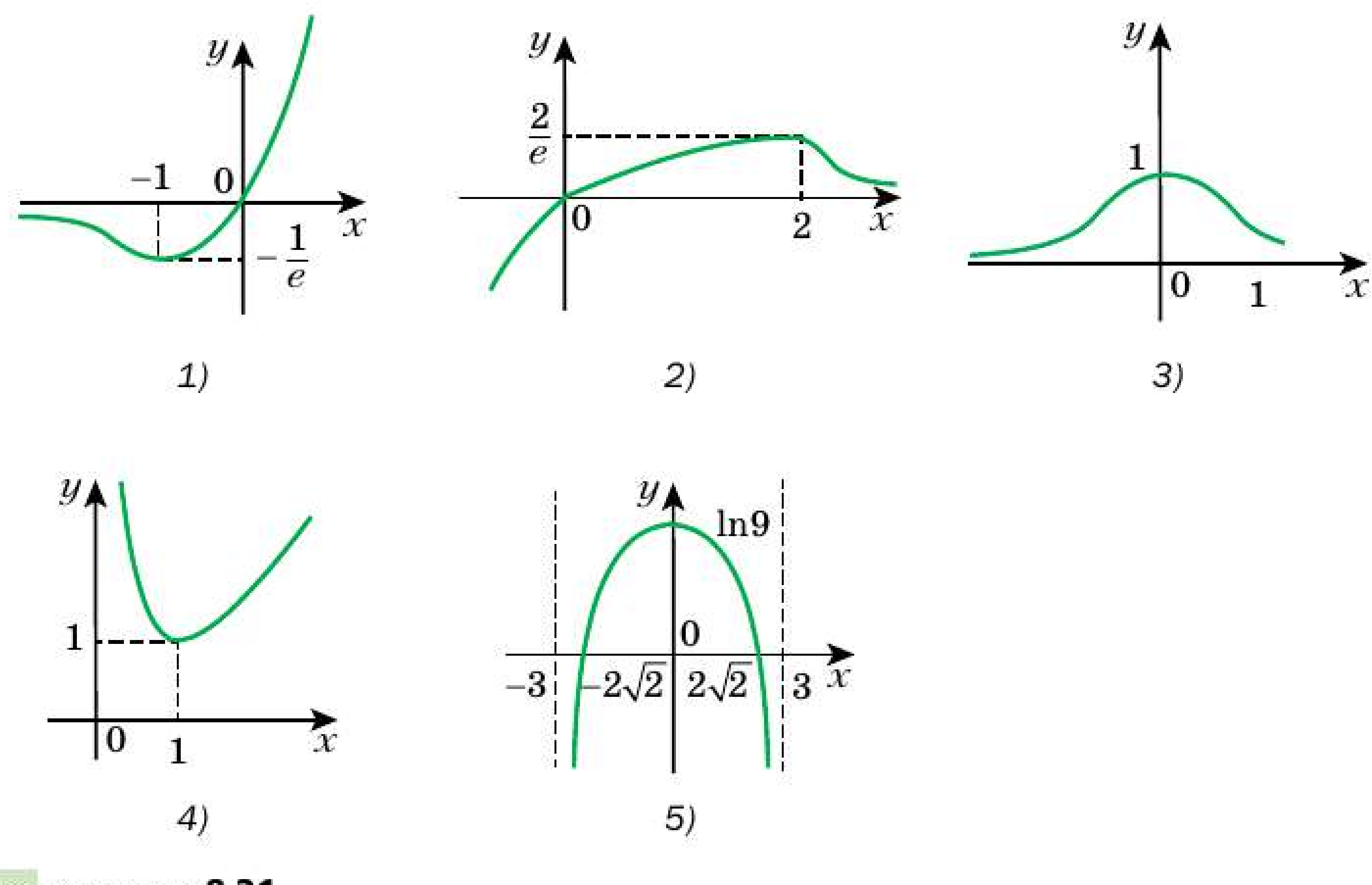


Рис. к задаче 8.21

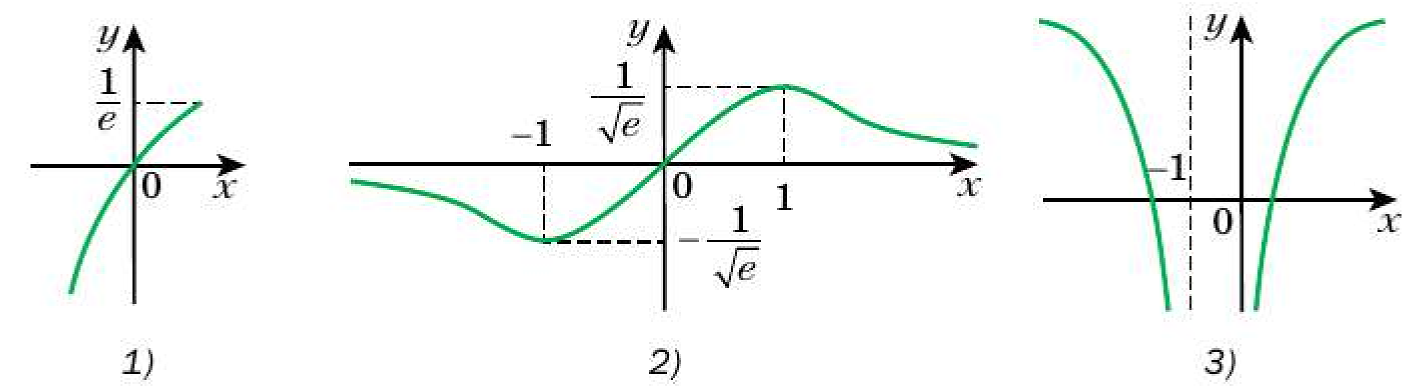


Рис. к задаче 8.22

Глава 2. **9.8.** 1) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{10}{3}$; 2) $y = -\cos x - 2$; 3) $y = e^x - 7$. **9.9.** 1) $y = \frac{x^4}{4} + 1$; 2) $y = \sin x + 2$; 3) $y = \frac{3^x}{\ln 3}$. **9.10.** 1) $y = -\frac{1}{x} - 6$; 2) $y = \operatorname{tg} x + 2\sqrt{3}$; 3) $y = \ln(-x) + 4$; 4) $y = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{3}$. **9.11.** 1) $y = -\operatorname{ctg} x + 1$; 2) $y = 2\sqrt{x} + 2$; 3) $y = \ln x - 1$; 4) $y = \frac{2^x + \ln 2 - 32}{\ln 2}$. **9.15.** $\frac{1}{2}$. **9.16.** $-\frac{1}{2}$. **9.17.** $-\frac{\cos x^4}{4} + C$, где C — любое число. *Указание.* Вычислите производную функции $y = -\frac{\cos x^4}{4}$. **9.18.** $e^{\sin x} + C$, где C — любое число. **9.19.** *Указание.* Пусть F — первообразная нечётной функции f. Тогда $F'(x) = f(x)$ и $F'(-x) = -f(-x)$. Отсюда $F'(x) = F'(-x)$. Следовательно, $F(x) = F(-x) + C$, где C — некоторое число. Подставив $x = 0$, доказываем, что $C = 0$. **10.5.** 1) $F(x) = x - x^2 + 8$; 2) $F(x) = x^3 - 2x^2 + 5$; 3) $F(x) = -\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{x}{2} + 6{,}5$; 4) $F(x) = \frac{1}{3}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{5}{3}$; 5) $F(x) = 4x + \frac{1}{x} - 4$; 6) $F(x) = 7\ln(x - 4) + 2\sqrt{x + 4}$; 7) $F(x) = \sqrt{6x + 1} + 2$; 8) $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{2}{3}$; 9) $F(x) = \frac{(3x - 2)^3}{9} - \frac{1}{9}$; 10) $F(x) = \frac{2}{3}\operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{6}\right)$. **10.6.** 1) $F(x) = 3x - 3x^2 + 6$; 2) $F(x) = x^4 - 2x^3 + x + 5$; 3) $F(x) = x^2 - 2\sqrt{x} - 2$; 4) $F(x) = -\frac{2}{3}\cos 3x - \frac{2}{3}$; 5) $F(x) = 8\sqrt{\frac{x}{2} - 2} + 4$; 6) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+1} + 3{,}5$; 7) $F(x) = \frac{1}{4}\ln(4x - 3e^2) + 5{,}5$; 8) $F(x) = -8\operatorname{ctg}\frac{x}{8} + 5$. **10.7.** $F(x) = x^4 + 2x^2 - 3$, первообразная имеет ещё один нуль, равный 1. **10.8.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - 12x + 27$. **10.9.** 1) F_2; 2) F_2. **10.10.** F_1. **10.11.** $s(t) =$

$= \dfrac{t^3}{3} + t^2 - 3t$. **10.12.** $s(t) = 2t^3 + t - 47$ или $s(t) = 2t^3 + t - 67$. **10.13.** $y = 2x^3 - x^5 + 7$. **10.14.** $y = 6\sqrt{x} + x - 21$. **10.15.** 1) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$. *Указание*. Примените формулы понижения степени; 2) $-\dfrac{1}{16}\cos 8x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$. *Указание*. Примените формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму; 3) $\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{2x}{3} - \dfrac{1}{8}\sin 4x + C$. **10.16.** 1) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{8}\sin 4x + C$; 2) $\dfrac{1}{14}\sin 7x + \dfrac{1}{18}\sin 9x + C$. **10.17.** $F_1(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5}{6}$, $F_2(x) = \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{323}{24}$. **10.18.** $F_1(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + \dfrac{2}{3}$, $F_2(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x - \dfrac{20}{3}$. **10.19.** $F(x) = -x^2 + 5x - \dfrac{17}{4}$. **10.20.** $F(x) = \dfrac{x^2}{2} + x - 3{,}5$.

11.5. 1) $4\dfrac{2}{3}$; 2) 1,5; 3) 4; 4) $7\dfrac{1}{3}$; 5) $\dfrac{1}{2}\ln 8$; 6) $1\dfrac{1}{3}$; 7) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$; 8) $\dfrac{1}{2}$; 9) $\dfrac{3e^2 - 1}{e^2}$; 10) 18. **11.6.** 1) $1\dfrac{1}{3}$; 2) $7\dfrac{1}{3}$; 3) $8\ln 2$; 4) $\dfrac{2}{3}$; 5) $\dfrac{52}{3}$; 6) $\dfrac{72 - 2\ln 3}{\ln 3}$. **11.8.** 1) 70; 2) 1,5; 3) $\sqrt{3}$; 4) 39; 5) 0; 6) $\dfrac{4}{3}$; 7) $\dfrac{1}{2}\ln 5$; 8) 3; 9) 0; 10) $6e - 6$; 11) $-\dfrac{1}{9}$; 12) 240. **11.9.** 1) -45; 2) 6; 3) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$; 4) $\dfrac{1}{5}$; 5) $\dfrac{2}{3}$; 6) $\dfrac{7}{288}$; 7) $\dfrac{1}{3}\ln 10$; 8) $\dfrac{1}{12}$; 9) $\dfrac{78}{7}$. **11.10.** 1) $10\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $e^2 - 3$; 4) $4\ln 4 - 3$; 5) $12 - 4\ln 4$; 6) $10\dfrac{2}{3}$; 7) $1\dfrac{1}{3}$; 8) 4,5; 9) 4,5; 10) $\dfrac{1}{3}$; 11) $\dfrac{1}{12}$; 12) 1; 13) $24 - 7\ln 7$; 14) 2; 15) $\sqrt{2} - 1$. **11.11.** 1) $4\dfrac{1}{4}$; 2) $\dfrac{2}{3}$; 3) $1\dfrac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) $2\dfrac{2}{3}$; 6) $6 - 3\ln 3$; 7) 1; 8) $12 - 5\ln 5$. **11.12.** 3. **11.13.** 3; -3. **11.14.** 2; -2. **11.15.** 6. **11.16.** $-\sqrt[4]{8}$. **11.17.** 1) $(0; 1) \cup (3; +\infty)$; 2) $(\log_{0,2}6; +\infty)$. **11.18.** $(1; +\infty)$. **11.19.** 1) $\dfrac{4 - \pi}{12}$; 2) $\pi - 2$; 3) 0; 4) $\dfrac{3e^2 + 8e - 8}{8e^2}$. **11.20.** 1) $\dfrac{20 - 5\pi}{2}$; 2) $\dfrac{\pi}{2}$; 4) $e^2 - e - \dfrac{1}{2}$. **11.21.** 1) 16,5; 2) 4,5; 3) $21\dfrac{1}{3}$; 4) 4,5; 5) 7,5; 6) $8 - 4\ln 2$. **11.22.** 1) 4,5; 2) $10\dfrac{2}{3}$; 3) 4,5; 4) 9. **11.23.** 1) $5\dfrac{1}{3}$; 2) 1,5. **11.24.** 1) $2\dfrac{5}{6}$; 2) 3. **11.25.** $1\dfrac{1}{12}$. **11.26.** $\dfrac{1}{6}$. **11.27.** 1) $\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\frac{9\pi}{4}$; 3) 4π; 4) $\frac{9\pi}{2}$; 5) 8,5; 6) 6,5. **11.28.** 1) $\frac{25\pi}{2}$; 2) 3π; 3) 2π; 4) 5. **11.29.** 0. *Указание*. Докажите, что функция $y = \frac{2^{\sqrt[3]{x}} - 1}{2^{\sqrt[3]{x}} + 1}$ является нечётной. **11.30.** 0. **11.31.** 1. *Указание*. Изобразите криволинейную трапецию, площадь которой равна искомому интегралу, и рассмотрите функцию, обратную к подынтегральной функции. **11.32.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **11.33.** $\frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2}$. *Указание*. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.

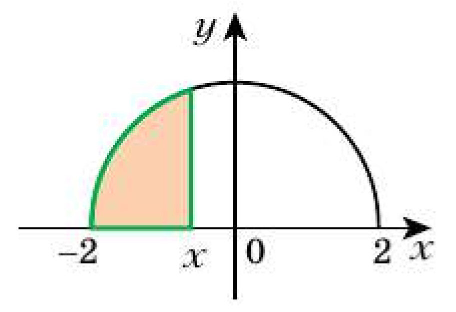


Рис. к задаче 11.33

12.1. 1) $\frac{13\pi}{3}$; 2) $\frac{178\pi}{15}$; 3) $\frac{15\pi}{2}$; 4) $\frac{2\pi}{15}$; 5) $\frac{19\pi}{24}$. **12.2.** 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) $\frac{\pi}{30}$; 3) $\frac{\pi}{2}$. **12.3.** $\frac{9}{8}\pi R^3$, $\frac{5}{24}\pi R^3$.

Глава 3. **13.4.** 3) $x = 2$, $y = 1$ или $x = -\frac{9}{5}$, $y = \frac{6}{25}$. **13.27.** 4) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}i$; 5) $\frac{14}{13} + \frac{5}{13}i$. **13.29.** 1) $1 - 2i$. **13.30.** 2) $\frac{7}{25} - \frac{24}{25}i$. **13.31.** 3) $\frac{6}{5}$; 5) 1. **13.32.** 2) $-\frac{33}{65} - \frac{4}{65}i$. **13.33.** 2) $\frac{1}{25} + \frac{7}{25}i$. **13.34.** 3) $\frac{69}{13} + \frac{58}{13}i$. **13.41.** $n = 4k$, $k \in \boldsymbol{N}$. **13.42.** $50 - 50i$. **13.43.** 0; 1; $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. **13.44.** *Указание*. Воспользуйтесь равенством $|z^n| = |z|^n$. **14.2.** 2) См. рисунок; 4) см. рисунок; 5) см. рисунок. **14.3.** 6) См. рисунок. **14.5.** 3) См. рисунок. **14.7.** 1) $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 3) $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **14.8.** 2) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **14.10.** 3) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$;

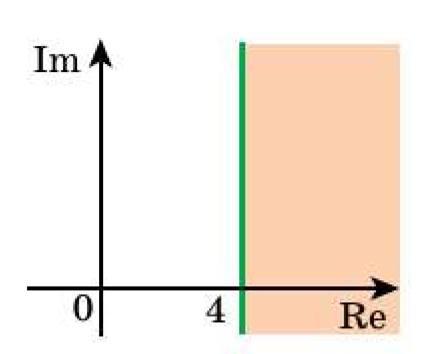


Рис. к задаче 14.2 (2)

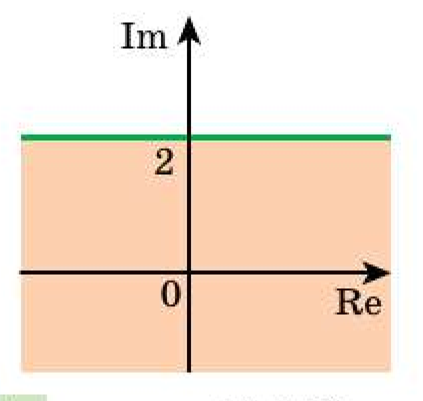


Рис. к задаче 14.2 (4)

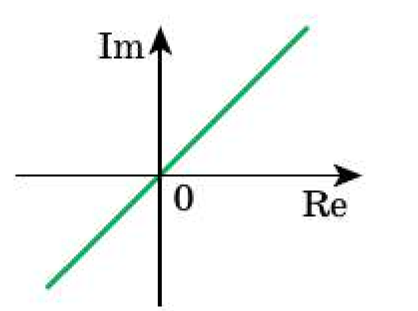


Рис. к задаче 14.2 (5)

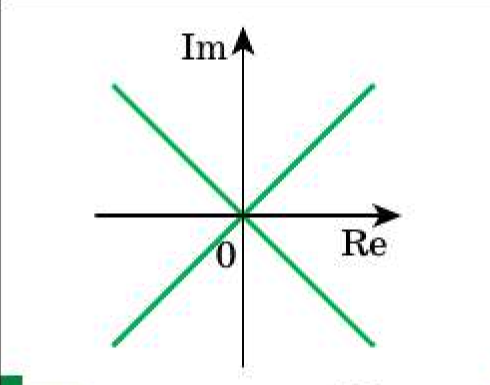


Рис. к задаче 14.3 (6)

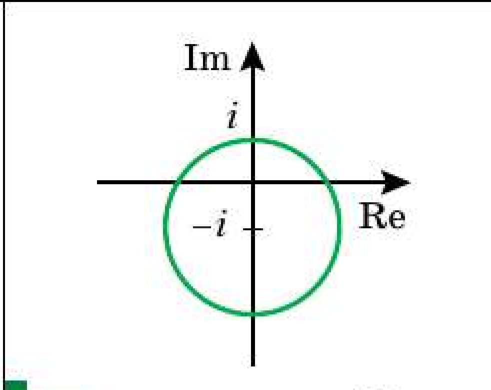


Рис. к задаче 14.5 (3)

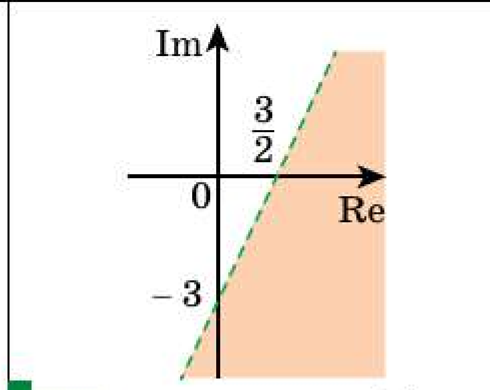


Рис. к задаче 14.19 (3)

5) $\sqrt{5}\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)+i\sin\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right)\right)$; 7) $13\cos\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)+$ $+\ i\sin\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right)\right)$. **14.11.** 3) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 7) $10\left(\cos\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)+i\sin\left(\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\right)\right)$. **14.12.** 2) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{11}\right)+\right.$ $\left.+\ i\sin\left(-\frac{\pi}{11}\right)\right)$; 3) $6\left(\cos\frac{9\pi}{26}+i\sin\frac{9\pi}{26}\right)$; 5) $\cos\left(\pi+\frac{1}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{1}{3}\right)$. **14.13.** 3) $\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$; 4) $3\left(\cos\frac{13\pi}{11}+i\sin\frac{13\pi}{11}\right)$. **14.17.** $\frac{mz_2+nz_1}{m+n}$. **14.19.** 3) См. рисунок. **14.21** 1) $2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$; 2) $-2\cos\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\varphi}{2}\right)\right)$. **14.22.** 1) $2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)+\right.$ $\left.+\ i\sin\left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right)\right)$; 2) $-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi-\varphi}{2}\right)\right)$. **14.23.** 1) Окружность с центром $M(1-i)$ радиуса $\sqrt{2}$ с выколотой точкой $z=0$ (см. рисунок); 2) см. рисунок. **14.24.** 1) См. рисунок. **15.1.** 2) $5\left(\cos\left(1-\frac{\pi}{16}\right)+i\sin\left(1-\frac{\pi}{16}\right)\right)$; 3) $8\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)$.

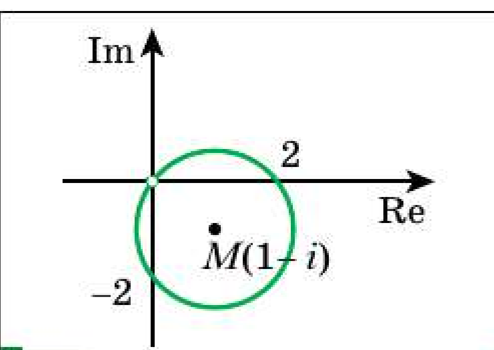


Рис. к задаче 14.23 (1)

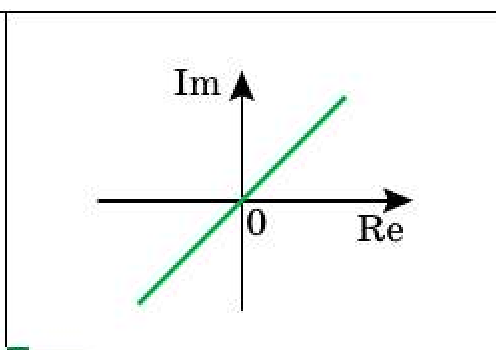


Рис. к задаче 14.23 (2)

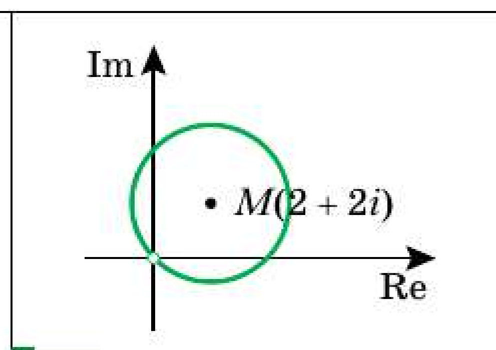


Рис. к задаче 14.24 (1)

15.2. 2) $21\left(\cos\frac{1}{12}+i\sin\frac{1}{12}\right)$. **15.3.** 2) $\frac{3}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$; 3) $2(\cos(\pi+1)+i\sin(\pi+1))$. **15.4.** 2) $-3i$; 3) $3\left(\cos\left(8-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(8-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. **15.5.** 2) $27\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$; 3) $\cos\frac{1}{5}+i\sin\frac{1}{5}$. **15.7.** 2) -1; 3) $625\left(\cos\left(4\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(4\arccos\frac{3}{5}\right)\right)$; 4) -64; 5) $\frac{\sqrt{3}-i}{16}$. **15.8.** 3) $\cos\left(-10\arccos\frac{5}{13}\right)+i\sin\left(-10\arccos\frac{5}{13}\right)$. **15.9.** 1) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$, $\sqrt{3}\left(\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$, $\sqrt{3}\left(\cos\frac{14\pi}{9}+i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$; 3) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{10}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right)$, $2\left(\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10}\right)$, $2\left(\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10}\right)$, $2\left(\cos\frac{11\pi}{10}+i\sin\frac{11\pi}{10}\right)$, $-2i$. **15.11.** 1) См. рисунок; 3) см. рисунок. **15.12.** 1) См. рисунок; 2) см.

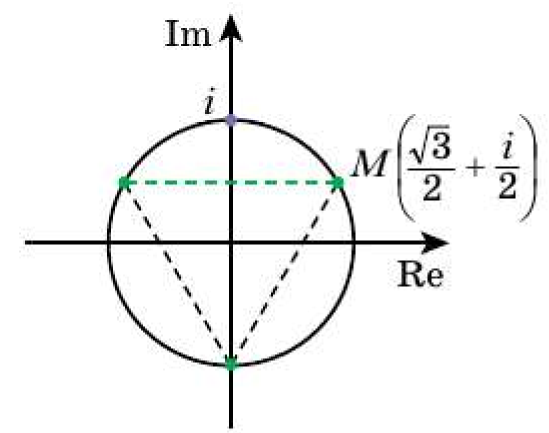


Рис. **к задаче 15.11 (1)**

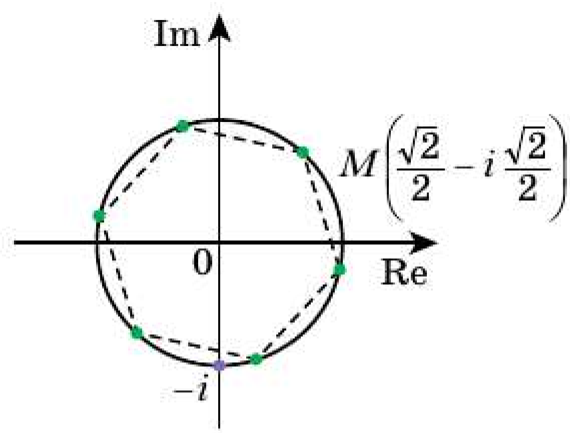


Рис. **к задаче 15.11 (3)**

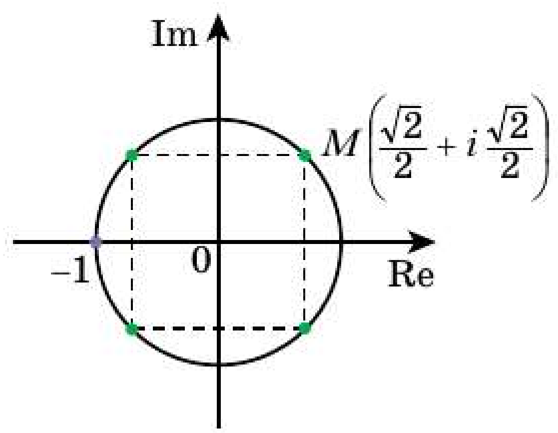


Рис. **к задаче 15.12 (1)**

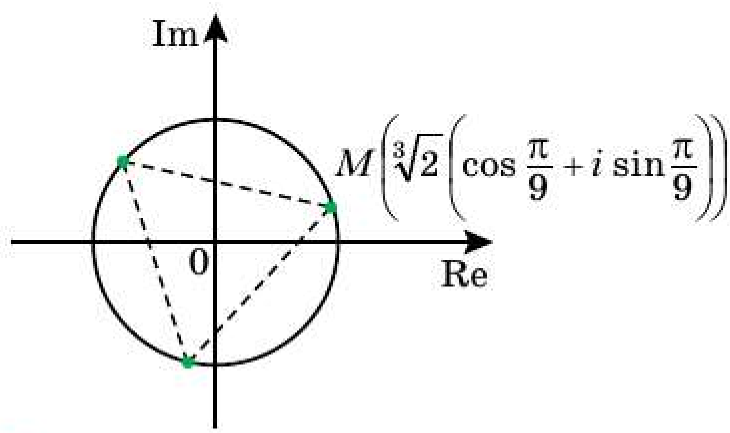


Рис. **к задаче 15.12 (2)**

рисунок. **15.13.** 1. **15.14.** 0. **15.15.** (0; 0); $\left(\cos\frac{2\pi k}{7}; \sin\frac{2\pi k}{7}\right)$, где $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **15.16.** (0; 0); $\left(\cos\frac{2\pi k}{5}; \sin\frac{2\pi k}{5}\right)$, где $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. **15.17.** Ошибка ученика в том, что он распространил определение и свойства арифметического квадратного корня из неотрицательного действительного числа на комплексные числа. На множестве комплексных чисел существуют два значения квадратного корня из числа $(-1)^2 = 1$ — это числа 1 и –1. **15.19.** *Указание*. Пусть $a = \cos\frac{\pi}{13} + i\sin\frac{\pi}{13}$. Тогда $a^3 = \cos\frac{3\pi}{13} + i\sin\frac{3\pi}{13}$, $a^5 = \cos\frac{5\pi}{13} + i\sin\frac{5\pi}{13}$, ..., $a^{11} = \cos\frac{11\pi}{13} + i\sin\frac{11\pi}{13}$. Тогда $a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{11} = \left(\cos\frac{\pi}{13} + \cos\frac{3\pi}{13} + \ldots + \cos\frac{11\pi}{13}\right) + i\left(\sin\frac{\pi}{13} + \sin\frac{3\pi}{13} + \ldots + \sin\frac{11\pi}{13}\right)$. Далее, используя формулу суммы геометрической прогрессии, преобразуйте выражение $a + a^3 + a^5 + \ldots + a^{11}$ и приравняйте действительные части чисел, записанных в левой и правой частях равенства. **15.20.** *Указание*. Пусть $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Тогда $\cos^{100}\varphi = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^{100}$. Далее воспользуйтесь формулой бинома Ньютона. **15.22.** *Указание*. Рассмотрите комплексное число $(1 + i)^{51}$. **15.23.** $x = 19$, $y = 40$. **15.24.** Нет. *Указание*. Рассмотрите значения данных функций при $x = i$. **15.29.** *Указание*. Пусть комплексные координаты точек A, K и N равны z_1, z_2 и z_3 соответственно. Достаточно показать, что $(z_2 - z_1) = e(z_3 - z_1)$, где e — одно из чисел $\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ или $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$. **16.1.** 2) $1 + 2i$; $2 - 4i$; 3) $2 + 3i$; $1 - 3i$; 4) $2 + i$; $3 - 2i$. **16.2.** 2) $3 + i$; $9 - 3i$; 3) $4 + i$; $-2 - i$; 4) $4 - 3i$; i. **16.3.** 2) 2; $2i$; $-2i$; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$; 4) i; $1 + i$; $1 - i$. **16.4.** 2) –3; $3i$; $-3i$; 4) 1; $1 + i$; $2 - 2i$. **16.5.** $\frac{67}{625}$. **16.6.** 56. **16.8.** $x^3 + 7x^2 + 14x - 1 = 0$. **16.9.** $x^3 - 4x^2 + 7x - 2 = 0$. **16.10.** $\cos\frac{2\pi k}{7} + i\sin\frac{2\pi k}{7}$, где $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **16.11.** $\cos\frac{\pi + 2\pi k}{10} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{10}$, где $k \in \{0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. **16.12.** $-2x + 5$. *Указание*. Найдите корни квадратного уравнения $x^2 - x + 1 = 0$ и подставьте их в равенство $P(x) = Q(x)(x^2 - x + 1) + ax + b$. **16.13.** $-x + 6$. **16.14.** *Указание*. Воспользовавшись равенствами $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$,

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$, докажите, что $\overline{P(z)} = P(\overline{z})$. **16.16.** 1) (–1; 2; 3); (–1; 3; 2); (2; 3; –1); (2; –1; 3); (3; 2; –1); (3; –1; 2); 2) (–3; 1; 1); (1; –3; 1); (1; 1; –3). **16.17.** 2) (2; –1; 1); (2; 1; –1); (1; –1; 2); (1; 2; –1); (–1; 1; 2); (–1; 2; 1). **16.18.** Нет. *Указание.* Приведите пример многочлена с рациональными коэффициентами, имеющего три иррациональных корня. **16.19.** *Указание.* Пусть числа x, y и z являются корнями многочлена $P(t) = t^3 - pt^2 + qt - r$. По условию задачи $p - 3q + 9r = \frac{1}{3}$. **16.20.** *Указание.* Воспользуемся методом математической индукции. Если $n = 1$, то утверждение задачи очевидно. Пусть утверждение задачи имеет место для всех $k \leqslant n$. Рассмотрим многочлен P степени $n + 1$ с действительными коэффициентами. По основной теореме алгебры многочлен P имеет корень z_0. Если $z_0 \in \mathbf{R}$, то существует такой многочлен Q с действительными коэффициентами, что $P(z) = (z - z_0)Q(z)$. Если $z_0 \notin \mathbf{R}$, то по ключевой задаче 16.14 многочлен P имеет ещё один корень $\overline{z}_0$. Тогда существует такой многочлен Q, что $P(z) = (z - z_0)(z - \overline{z}_0)Q(z) = (z^2 - (z_0 + \overline{z}_0)z + z_0\overline{z}_0)Q(z)$, причём коэффициенты многочлена Q и квадратного трёхчлена $z^2 - (z_0 + \overline{z}_0)z + z_0\overline{z}_0$ являются действительными числами. Далее воспользуйтесь предположением индукции для многочлена Q. **16.21.** *Указание.* Согласно задаче 16.20 данный многочлен можно разложить на произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами. Если бы среди этих множителей не было ни одного линейного, то степень данного многочлена была бы чётным числом. **16.22.** Да, например $y = x^3$. **16.23.** *Указание.* Имеем $q = xy + xz + yz = 8$. Обозначим $r = xyz$. Тогда x, y и z являются корнями уравнения $t^3 - 5t^2 + 8t - r = 0$. Данное кубическое уравнение имеет три (с учётом кратности) корня тогда и только тогда, когда $4 \leqslant r \leqslant \frac{112}{27}$. **16.24.** *Указание.* Из условия задачи следует, что число $ab + bc + ca$ также делится нацело на n. Рассмотрите уравнение $t^5 = (a + b + c)t^4 - (ab + bc + ca)t^3 + abct^2$, корнями которого являются числа a, b и c. Последовательно подставьте в данное уравнение вместо t значения a, b и c и сложите полученные равенства. **16.25.** *Указание.* Пусть $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Тогда равенство $t^3 - t^2 + qt - r = (t - a)(t - b)(t - c)$ выполняется для всех t. При $t = \frac{1}{2}$ получаем $-\frac{1}{8} + \frac{q - 2r}{2} = \left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - b\right)\left(\frac{1}{2} - c\right)$. Если каждое из чисел a, b, c не больше $\frac{1}{2}$, то из неравенства Коши следует: $\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - b\right)\left(\frac{1}{2} - c\right) \leqslant \left(\frac{\frac{3}{2} - (a + b + c)}{3}\right)^3 = \frac{1}{216}$. Поэтому $-\frac{1}{8} + \frac{q - 2r}{2} \leqslant \frac{1}{216}$.

Отсюда $q - 2r \leqslant \frac{7}{27}$. Если же среди чисел a, b и c есть бо́льшие, чем $\frac{1}{2}$, то такое число среди них единственное. Тогда $\left(\frac{1}{2} - a\right)\left(\frac{1}{2} - b\right)\left(\frac{1}{2} - c\right) \leqslant 0$. Отсюда $-\frac{1}{8} + \frac{q - 2r}{2} \leqslant 0 < \frac{1}{216}$.

Глава 4. **17.9.** 200. **17.10.** 24. **17.11.** $n!$. **17.13.** 30!. **17.14.** A_{25}^{6}. **17.15.** A_{n}^{5}. **17.16.** C_{25}^{6}. **17.17.** C_{100}^{40}. **17.18.** 5^n. **17.19.** 0. *Указание.* Подставьте в формулу бинома Ньютона $a = 1$, $b = -1$. **17.20.** 1. **17.23.** 2. **17.24.** $\frac{1}{2^{100}}$. **17.25.** 17. **17.26.** 67. **17.27.** 49. **17.28.** Тринадцатый член разложения имеет вид $C_{22}^{12}x^{-2}$. **17.29.** 8. **17.30.** 3^n. **17.31.** 3^{15}. **17.32.** 4^6. **17.33.** $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. *Указание.* Вычислите количество способов разложить n различных шаров по трём различным ящикам так, чтобы: а) два ящика были пустыми; б) один ящик был пустым. **17.34.** $\frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}$. *Указание.* Сравните искомое количество с количеством способов разложить n различных шаров по трём различным ящикам так, чтобы ни один ящик не остался пустым. **17.35.** $\frac{3^{n-1} + 1}{2}$. *Указание.* Вычислите количество способов разложить n различных шаров по трём одинаковым ящикам так, чтобы: а) два ящика были пустыми; б) один ящик был пустым. **17.36.** C_{n+2}^{2}. *Указание.* Если среди $(n + 2)$ шаров, расставленных в ряд, пометить два, то остальные n шаров разобьются на три группы, что позволит соответственно разложить их по трём различным ящикам. Например, если помечены шары, изображённые на рисунке, то в первый ящик попадёт один шар, во второй — три шара, а в последний — $(n - 4)$ шара. **17.37.** C_{n-1}^{2} при $n \geqslant 3$; 0 при $n < 3$. *Указание.* Если между n шарами, расставленными в ряд, поставить две перегородки, то шары разобьются на три группы, что позволит соответственно разложить их по трём различным ящикам. Например, если перегородки поставить так, как изображено на рисунке, то в первый ящик попадёт один шар, во второй — три шара, а в последний — $(n - 4)$ шара. Эту задачу можно решить и иначе. Если сначала положить в каждый ящик по одному шару, то данную задачу можно свести к задаче 17.34. **17.38.** *Указание.* На рисунке показано, что сумма чисел,

○ ⊗ ○ ○ ○ ⊗ ○ ... ○ ○ ○

Рис. **к задаче 17.36**

○ | ○ ○ ○ | ○ ... ○ ○ ○

Рис. **к задаче 17.37**

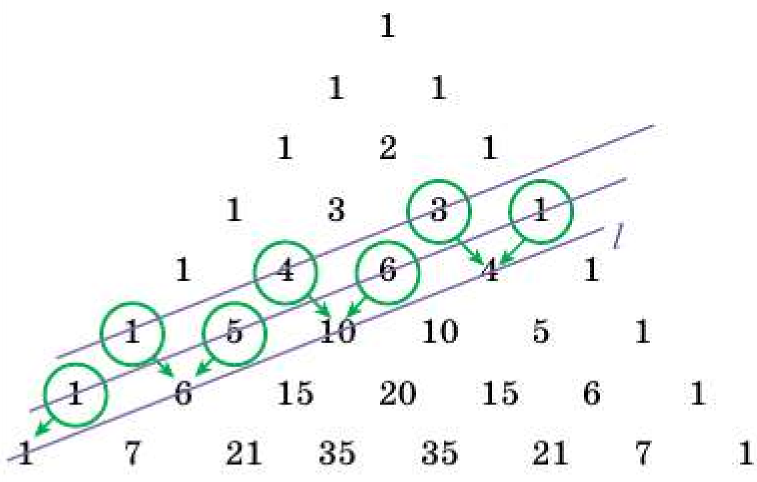


Рис. к задаче 17.38

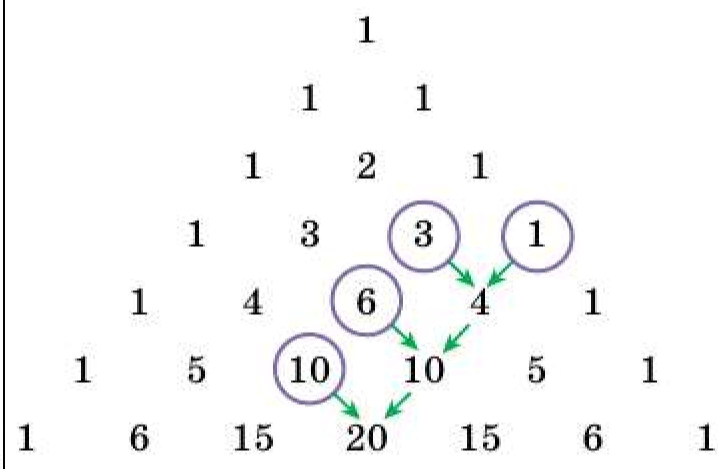


Рис. к задаче 17.39

стоящих на соседних красных прямых, равна сумме чисел, расположенных на следующей красной прямой. **17.39.** *Указание.* См. рисунок. **17.40.** $11^4 = (10+1)^4 = 10^4 + C_4^1 10^3 + C_4^2 10^2 + C_4^3 10^1 + 1 = 14\,641$. **17.41.** 6. **17.42.** 3. **17.43.** $A = B = 2^{100}$. *Указание.* Докажите, что $A + B = 2^{101}$, а $A - B = 0$. **17.44.** $C_{200}^{117}(\sqrt{2})^{117}$. *Указание.* Сравните два соседних слагаемых формулы бинома Ньютона. **17.45.** $-C_{50}^{23} 2^{27}(\sqrt{3})^{23}$. **17.46.** $n2^{n-1}$. *Указание.* Вычислите производную обеих частей равенства $(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \ldots + C_n^n x^n$. **17.47.** Все 1000 цифр после запятой — девятки. *Указание.* Используя формулу бинома Ньютона, докажите, что $(\sqrt{50}+7)^{1000} + (\sqrt{50}-7)^{1000}$ — целое число. Поэтому число $(\sqrt{50}+7)^{1000}$ меньше целого на положительное число $(\sqrt{50}-7)^{1000} = \dfrac{1}{(\sqrt{50}+7)^{1000}} < \dfrac{1}{10^{1000}}$. **18.1.** «Синий», «красный». **18.2.** 0, 1, 2, 3. **18.3.** $\Omega = \{$М, А, Т, Е, И, К$\}$. **18.4.** $\Omega = \{2, 3, \ldots, 12\}$. **18.5.** $\Omega = \{(0; 0), (0; 1), (1; 0), (0; 2); (1; 1); (2; 0), \ldots\}$. **18.6.** $\Omega = (0; +\infty)$. **18.9.** 1) $\overline{A} = Y$; 2) $A \cup B = T$; 3) $A \setminus B = Z$. **18.14.** 1) $[0; +\infty)$; 3) $(-\infty; 0]$; 4) $[0; 1)$; 5) $[1; 2]$. **18.17.** 26 %. **18.18.** 51 %. **18.19.** $\dfrac{6}{7}$. **18.21.** 1) *Указание.* Событие A является объединением несовместных событий $X = A \cap B$ и $Y = A \setminus B$. Поэтому $P(A) = P(X) + P(Y) \geqslant P(X)$. Отсюда следует, что $0 \leqslant P(X) \leqslant P(A) = 0$. **18.22.** *Указание.* Воспользуйтесь теоремой 18.1. **18.24.** 1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{5}{36}$; 3) $\dfrac{2}{3}$; 4) $\dfrac{13}{36}$. **18.25.** 1) $\dfrac{3}{4}$; 2) $\dfrac{1}{8}$; 3) $\dfrac{5}{8}$; 4) $\dfrac{3}{8}$. **18.26.** 1) 35 %; 2) 25 %. **18.28.** 12 %. *Указание.* Пусть событие A состоит в том, что встретившийся абитуриент — призёр областной олимпиады, а событие B — отличник. Тогда событие $A \cap B$ состоит в том, что встретившийся абитуриент будет призёром областной олимпиады и отличником в одном лице. Далее воспользуйтесь теоремой 18.1. **18.29.** 0,7. **18.30.** 0,67. **18.31.** 1) 0,03; 2) 0,01; 3) 0,05; 4) 0,04. **18.32.** 1) 40 %; 2) 20 %; 3) 10 %; 4) 30 %. **18.33.** Да. *Указание*. Рассмотрим следующие события: A — «выбранный выпускник знает английский и немецкий языки», B — «выбранный выпускник знает немецкий и французский языки», C — «выбранный выпускник знает английский и французский языки». Далее докажите, что для этих событий выполняется равенство $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - 2P(A \cap B \cap C)$, и воспользуйтесь тем, что $P(A \cup B \cup C) \leqslant 1$. **19.3.** 1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 0. **19.4.** $\frac{1}{4}$. **19.8.** 1) 0,2; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0,4. **19.9.** 1) 0,5; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{7}{12}$. **19.12.** $\frac{8}{29}$. **19.13.** $\frac{10}{11}$. **19.14.** 1) $\frac{7}{9}$; 4) 1. **19.15.** 1) $\frac{5}{7}$; 4) $\frac{1}{2}$. **19.16.** $\frac{14}{15}$. **19.17.** 75 %. **19.18.** 1) 82 %. *Указание*. Пусть событие H_1 означает, что выбранная ручка синяя, а H_2 — что ручка красная. Далее воспользуйтесь формулой полной вероятности $P(A) = P_{H_1}(A) \cdot P(H_1) + P_{H_2}(A) \cdot P(H_2)$; 2) $\frac{42}{123}$. **19.19.** 1) 39,2 %; 2) $\frac{9}{14}$. **19.20.** 1) 2,4 %; 2) $\frac{297}{976}$. **19.21.** $\frac{10}{27}$. **19.22.** $\frac{1}{3}$. **19.23.** 0,648 всех конфет нужно отдать Пете, оставшуюся часть — Серёже. *Указание*. Составьте дендрограмму, описывающую, как мог бы продолжаться этот матч, и найдите вероятность того, что в матче победил бы Петя. **20.1.** 24 %. **20.3.** $p(1-p)^5$. **20.5.** *Указание*. Поскольку событие B является объединением несовместных событий $\bar{A} \cap B$ и $A \cap B$, то $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\bar{A})$. **20.7.** Нет. **20.9.** Нет. *Указание*. Если A и B — несовместные и независимые события, то $P(A \cap B) = 0$ и $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. **20.11.** 1) 14 %; 2) 9 %; 3) 6 %; 4) 36 %; 5) 41 %; 6) 55 %. **20.12.** 1) 72,9 %; 2) 24,3 %; 3) 2,7 %; 4) 0,1 %. **20.13.** 1) 6,25 %; 2) 40,96 %; 3) 10,24 %; 4) 40,96 %. **20.14.** $2p - p^2$. **20.15.** $1 - (1-p)^4$. **20.16.** $2p^3 - p^6$. При переходе на схему, изображённую на рисунке 20.8, вероятность безотказной работы увеличится (не уменьшится при $p = 0$ или $p = 1$) и будет равной $p^3(2-p)^3$. **20.17.** $(1-(1-p_1)^2)(1-(1-p_2)^3)p_3$. **20.18.** 6 оборотов. *Указание*. Вероятность того, что станция не обнаружит объект за k оборотов, равна $0{,}3^k$. **20.19.** 10 вопросов. **20.20.** $P(A) = \frac{A_{30000}^{1} \cdot A_{470000}^{14}}{A_{500000}^{15}}$, $P(A) \approx \frac{3}{50}\left(\frac{47}{50}\right)^{14} \approx 2{,}5\%$.

20.21. 8 %. **21.1.** Элементарным исходом является список отсутствующих, т. е. любой набор фамилий учеников класса. Случайная величина, которую рассматривает завуч, равна количеству отсутствующих на уроке учеников (количеству фамилий в списке отсутствующих). Множество значений случайной величины состоит из целых неотрицательных чисел, не превосходящих количества учеников в классе. **21.7.** 2) 0,1; 3) 0; 4) 0,5. **21.8.** Нет. **21.9.** 3) $\frac{1}{30}$. **21.10.** 3) 30 %; 4) 35 %; 5) 72 %. **21.11.** 1) 0,11; 2) 0,53; 3) 1; 4) 0,78.

21.12. 1)

Значение $x + 1$	2	8	11	14
Вероятность, %	40	30	20	10

4)

Значение $(x - 7)^2$	0	9	36
Вероятность, %	30	20	50

21.13. 1)

Значение $y - 4$	–7	–3	–2	–1
Вероятность, %	15	30	25	30

4)

Значение $(2 - y)^2$	0	1	25
Вероятность, %	25	60	15

21.14. 1) 0,2; 3) 0,6; 4) 0,8.

21.16.

Значение z	0	2	6
Вероятность	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

21.17.

Значение z	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

21.18.

Значение x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

21.20.

Значение x	1	2	3	4
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

21.21.

Значение x	1	2	3	4	5
Вероятность	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

21.22.

Значение x	1	2	3
Вероятность	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{25}{36}$

22.8. $C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 \approx 16\%$. **22.9.** $C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7 \approx 12\%$. **22.10.** $C_9^6 p^6(1-p)^3$. **22.11.** $C_{15}^2 p^2(1-p)^{13}$. **22.12.** $C_8^5 0{,}8^5 0{,}2^3 \approx 15\%$. **22.13.** $C_{10}^3 0{,}1^3 0{,}9^7 \approx 5{,}7\%$. **22.14.** $C_6^2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^4 \approx 14\%$. **22.15.** $C_r^k\left(\frac{n}{n+m}\right)^k\left(\frac{m}{n+m}\right)^{r-k}$.

22.16. $C_n^k\left(\frac{1}{r}\right)^k\left(\frac{r-1}{r}\right)^{n-k}$. **22.17.** 1) $P(z \leqslant 1) \approx 6$ %; 2) $P(2 \leqslant z < 5) \approx 71$ %. **22.18.** 1) $P(z > 3) \approx 94$ %; 2) $P(1 < z \leqslant 3) \approx 26$ %. **22.19.** 64. *Указание.* Выясните, при каких значениях k выполняется неравенство $P(z = k) < P(z = k + 1)$. **22.20.** 50. **22.21.** $C_6^5 0{,}65^5 0{,}35 + 0{,}65^6 \approx 32$ %. **22.22.** $1 - (C_{25}^1 0{,}08 \cdot 0{,}92^{24} + 0{,}92^{25}) \approx 61$ %. **22.23.** $C_{40}^{38} 0{,}97^{38} 0{,}03^2 + C_{40}^{39} 0{,}97^{39} 0{,}03 + 0{,}97^{40} \approx 88$ %. **22.24.** $p(A) = 1 - \frac{C_{470\,000}^{45}}{C_{500\,000}^{45}} - \frac{C_{30\,000}^{1} C_{470\,000}^{44}}{C_{500\,000}^{45}}$, $p(A) \approx 1 - \left(\frac{47}{50}\right)^{45} - 45 \cdot \frac{3}{50} \cdot \left(\frac{47}{50}\right)^{44}$, что приблизительно равно 76,1 %. **22.25.** 77 %. **23.1.** 1) $M(y) = 2$, $\sigma(y) = \sqrt{3}$; 2) $M(y) = 10$, $\sigma(y) = 2\sqrt{3}$; 3) $M(y) = -4$, $\sigma(y) = \sqrt{3}$; 4) $M(y) = 3$, $\sigma(y) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **23.4.** $M(t_C) = 10$ °C, $\sigma(t_C) = 5$ °C. **23.5.** 1) 2; 2) 2; 3) $\sqrt{2}$; 4) 0,8. **23.6.** 1) 5; 2) 88,2; 3) $\frac{21}{\sqrt{5}}$; 4) 8,4. **23.10.** Нет. **23.11.** 0. **23.12.** *Указание*. Найдите математическое ожидание выигрыша. **23.14.** 200 р. **23.15.** 3,8; 1,56. **23.16.** 1,8; 0,96. **23.17.** 3; $\frac{4}{\sqrt{10}}$. **23.18.** $\frac{55}{9}$ и $\frac{56}{81}$. **23.20.** 0,5; $\frac{5}{12}$. **23.21.** 2,5; $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **23.22.** 3) $M(x) \approx 4$, $\sigma(x) \approx 0{,}89$. **23.23.** 2) 1,2; 0,84. **24.1.** 3) $-\frac{15}{4}$. **24.3.** 7. **24.6.** 15. **24.7.** 16. **24.9.** 15. **24.14.** 850. **24.15.** 1,9. **24.16.** Приблизительно 275 анализов. **24.17.** 70. *Указание*. Пусть случайная величина x_i равна числу, выпавшему на первом кубике на i-м ходу, а y_i — числу, выпавшему на втором кубике на i-м ходу. Тогда $M(x_i) = M(y_i) = 3{,}5$. Поэтому $M((x_1 + y_1) + \ldots + (x_{10} + y_{10})) = M(x_1) + \ldots + M(x_{10}) + M(y_1) + \ldots + M(y_{10}) = 20 \cdot 3{,}5 = 70$. **24.18.** 132. *Указание*. Пусть случайная величина x_i равна числу, названому i-м учеником. Тогда $M(x_i) = 5{,}5$. Поэтому $M(x_1 + x_2 + \ldots + x_{24}) = M(x_1) + M(x_2) + \ldots + M(x_{24}) = 24 \cdot 5{,}5 = 132$. **24.19.** *Указание*. Поскольку $M(x) = 0$, то $M(x^2) = D(x)$. Тогда доказываемое неравенство можно переписать в виде $M(x^2 - 2|x| + 1) \geqslant 0$. **24.21.** 1. *Указание*. Пусть на празднике собралось n друзей и случайная величина x_i равна 1, если i-й человек получит свой подарок, и 0 в противном случае. Ясно, что $M(x_i) = \frac{1}{n}$. Тогда искомая величина равна $M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. **24.22.** 12. *Указание*. Пусть случайная величина x_i равна 1, если на i-й вопрос Коля даст правильный ответ, а Петя — неправильный. Если же это условие не выполняется, то x_i равно 0. Поскольку друзья отвечали независимо друг от друга, то вероятность того, что $x_i = 1$, составляет $\frac{15}{30} \cdot \frac{24}{30} = \frac{2}{5}$. Поэтому $M(x_i) = 1 \cdot \frac{2}{5} + 0 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$. Тогда искомая величина равна $M(x_1 + \ldots + x_{30}) = M(x_1) + \ldots + M(x_{30}) = 30 \cdot \frac{2}{5} = 12$. *Указание*. Рассмотрите квадратный трёхчлен $f(t) = M(x)t^2 - 2t + M\left(\frac{1}{x}\right)$. Поскольку $M(x)t^2 - 2t + M\left(\frac{1}{x}\right) = M\left(xt^2 - 2t + \frac{1}{x}\right) = M\left(\frac{(xt-1)^2}{x}\right) \geqslant 0$, то при всех действительных значениях t он принимает только неотрицательные значения.

Глава 5. 25.5. 5) Может сузиться на число -1, то есть может быть утерян корень $x = -1$. Если $-1 \notin D(f)$ или $f(-1) = 3$, то множество корней не изменится. **25.6.** 1) $\frac{\sqrt{29}-1}{2}$; 2) 1,5. **25.7.** 1) $\frac{1+3\sqrt{5}}{2}$; 2) 7. **25.8.** 1) πn, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 3) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.9.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.10.** 0; 1; -1; $\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}$. **25.11.** $\frac{5}{2}$; $-\frac{5}{2}$; 1; -1. **25.12.** 5. *Указание*. Умножив обе части уравнения на выражение $\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 10}$, получим $6(x-1) = 3(x-1)(\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 10})$. Отметим, что число 1 не является корнем исходного уравнения. Далее сложим почленно исходное уравнение и уравнение $\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{2x^2 - 7x + 10} = 2$. **25.13.** -9. **25.14.** 1) $\pi + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $4\pi + 8\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание*. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos\frac{3x}{2} = 1, \\ \sin\frac{x}{8} \neq 0. \end{cases}$$

25.15. 1) $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $3\pi + 4\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.16.** 1) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.17.** $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.18.** $\arccos\frac{1}{10} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **25.19.** $-\frac{5\pi}{3}$. *Указание*. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{2}, \\ -6 < x < 0, \\ x^2 + 6x + 10 \neq 0, \\ \sin 2x > 0. \end{cases}$$

25.20. $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

25.21. $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$. **25.22.** Корней нет. **25.23.** $\frac{3}{5}$. **26.1.** 1) 1; 7; $3\pm\sqrt{10}$; 2) 4; $1+\sqrt{3}$; 3) 2; 4) 3; 5) 0; 6) −3. **26.2.** 1) −2; −1; 3; 4; 2) −12; −4; 2; 3) 1; 4; 4) 4; 5) $-\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$; 6) 4. **26.3.** 1) −2; −1; 3; 2) 1; 3; 3) −1; 2; −3. **26.4.** 1) −2; 2) 1; −2. **26.5.** 1) −6; −4; −1; 1; 2) −3; 1. **26.6.** 1) −1; 1; 3; 2) −1; 1; 2; 4. **26.7.** 1) $\frac{3}{2}$; 2) $\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$; 3) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi n$, $n\in Z$. **26.8.** 1) −2; −1; 2; 3; 2) πn, $n\in Z$. **26.9.** 2; 9. **26.10.** 1) −7; −5; 2; 4; 2) $-4\pm\sqrt{21}$. **26.11.** 1) −6, −3, $\frac{-9\pm\sqrt{73}}{2}$; 2) $-4\pm\sqrt{5}$. **26.12.** 1) −2; $-\frac{1}{2}$. *Указание.* Представьте данное уравнение в виде $\left(2x-5+\frac{2}{x}\right)\left(2x+7+\frac{2}{x}\right)=-20$; 2) −6; −4; $\frac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$. **26.13.** 1) −8; $-\frac{15}{2}$; $\frac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$; 2) −4; 5; $-5\pm3\sqrt{5}$. **26.14.** 1) $\frac{1}{2}$; 2; $\frac{-11\pm\sqrt{105}}{4}$. *Указание.* Замена $x+\frac{1}{x}=t$; 2) $-3\pm\sqrt{15}$. **26.15.** 1) 1; $\frac{-11\pm\sqrt{85}}{6}$; 2) $5\pm\sqrt{31}$; $\frac{3\pm\sqrt{159}}{5}$. **26.16.** 0,5; 1; $\frac{7\pm\sqrt{73}}{4}$. **26.17.** 2; $-3\pm\sqrt{15}$. **26.18.** 1) $\operatorname{arctg}(-1\pm\sqrt{3})+\pi n$, $m\in Z$; 2) $\operatorname{arctg}2+\pi m$, $m\in Z$. *Указание.* Умножьте правую часть данного уравнения на $\sin^2x+\cos^2x$. **26.19.** $\operatorname{arctg}\frac{15}{7}+\pi n$, $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **26.20.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. *Указание*. Выполните замену $\sin x+\cos x=t$. **26.21.** $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in Z$. **26.22.** 1) 7; 2) 11. **26.23.** 1) 3; 18; 2) 8. **26.24.** 1) 4; 2) корней нет. **26.25.** 1) 3; 2) корней нет. **26.26.** 2) $\pi+4\pi n$, $n\in Z$. **26.28.** 1. **26.29.** −1. **26.30.** 2. **26.31.** 3. **26.32.** 0. **26.33.** 0. **27.1.** 1) $\left[\frac{5}{3};5\right]$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{5}\right)\cup(3;+\infty)$. **27.2.** 1) $\left(\frac{2}{7};\frac{2}{5}\right)$; 2) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$. **27.3.** 1) $(-1-\sqrt{5};-2)\cup(-2;-1+\sqrt{5})$; 2) $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$; 3) $(-5;3+2\sqrt{2})$; 4) $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **27.4.** 1) $\left(-\frac{3}{4};1\right)$; 2) $(-\infty;-3]\cup[1;5)\cup(5;+\infty)$; 3) $(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. **27.5.** 1) $\left(-\infty;\frac{-3-\sqrt{15}}{2}\right)$; 2) $(2;2\sqrt{2}]$; 3) $[-4;-3]\cup\left[-\frac{1}{3};0\right]$; 4) решений нет. **27.6.** 1) $[9;+\infty)$; 2) $\left[0;\frac{1}{2}\right)$; 3) [2; 4]; 4) $\left(-\infty;\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right]$. **27.7.** 1) $\left(\frac{1+\sqrt{29}}{2};+\infty\right)$; 2) $(-\infty;-2]\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$; 3) [0; 4]. **27.8.** 1) $\left[-2;-\frac{8}{5}\right)\cup(0;2]$; 2) $(-\infty;-3]$;

3) [2; 3]. **27.9.** 1) Решений нет; 2) $(-\infty; -10]\cup[1; +\infty)$; 3) $(-\infty; -2]\cup(0; +\infty)$. **27.10.** 1) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$; 2) $[-6; -4+\sqrt{2}]$; 3) $(-\infty; -3]\cup(0; +\infty)$. **27.11.** 1) 5; 2) $[-4; -1]$; 3) $(-\infty; -8]\cup\{1, 4\}$; 4) $(-\infty; -5]\cup[2; +\infty)\cup\left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$.
27.12. 1) [3; 12]; 2) $[7; +\infty)$; 3) $(-\infty; -3]\cup\{-2, 1\}$; 4) $\left(-\infty; -\frac{17}{2}\right]\cup[1; 10)$.
27.13. 1) $\left[-5; -\frac{9+\sqrt{61}}{8}\right)$; 2) $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. **27.14.** 1) $(2; +\infty)$; 2) 5.
27.15. 1) $\left(\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\arccos\frac{1}{9}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(\operatorname{arctg}2+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
27.16. 1) $\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \operatorname{arctg}2+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **27.17.** 1) $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(-\pi+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n; 2\pi n\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 4) $\left[2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right]\cup\left[\frac{4\pi}{3}+2\pi n; \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$.
27.18. 1) $\left(-\pi+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(2\pi n; \frac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 2) $\left(\pi n; \frac{\pi}{3}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{2\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in \boldsymbol{Z}$; 3) $\left(2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]\cup$ $\cup\left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \pi+2\pi n\right)\cup\left[\frac{3\pi}{2}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n\in \boldsymbol{Z}$. **27.19.** 1) $[3; 11]\cup\{2\}$; 2) $(0; 21]\cup\{-21\}$. **27.20.** 1) $[2; 10]\cup[37; +\infty)$; 2) $[-6; 0)\cup\{6\}$.
27.21. 1) $[-79; 83]$; 2) $[-5; 11]$; 3) $(-\infty; 1)$; 4) $[-2; +\infty)$; 5) $[1; +\infty)$.
27.22. 1) $[-57; 71]$; 2) $[-31; 33]$; 3) $[3; +\infty)$; 4) $[-3; +\infty)$. **28.11.** 20. **28.12.** 2.
28.13. 11 букетов. **28.14.** $\frac{a^2}{2}$. **28.15.** $\frac{b^2}{a}$. **28.16.** 4. **28.17.** Не существует.
28.18. Не существует. *Указание.* $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=3\cdot 37(a+b+c)$. Далее воспользуйтесь тем, что $a+b+c\leqslant 27$. **28.21.** Не может. *Указание.* Сум-

ма нечётного количества нечётных слагаемых — число нечётное. **28.23.** Не существует. *Указание*. Рассмотрите остаток при делении данного числа на 18. **28.26.** (4; 6). **28.27.** 25 и 76. *Указание*. Если x — искомое число, то значение выражения $x^n - x$ кратно 100. **28.29.** *Указание*. Пусть $p = 2n + 1$, $q = 2k + 1$. Тогда дискриминант данного уравнения $4n(n + 1) - 8(k + 1) + 5 \equiv$ $\equiv 5 \pmod 8$. **28.31.** 1) 15; 2) 22. **28.33.** 1) 22; 2) 18. **28.34.** 1) $\frac{2}{5}$. *Указание*. $\frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{9\cdot 10} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$; 2) $\frac{27}{58}$. **28.35.** 1) *Указание*. Каждое слагаемое данной суммы, кроме последнего, больше $\frac{1}{24}$. Тогда $\frac{1}{17} + \frac{1}{18} + \frac{1}{19} + \ldots + \frac{1}{24} > \underbrace{\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \ldots + \frac{1}{24}}_{8 \text{ слагаемых}} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

28.37. 2. **28.38.** 0,9 объёма бассейна. **28.39.** Нет. **28.41.** 36 пакетов. **28.42.** 14 банок. **28.43.** 15 ч. **28.44.** 11 дней. **28.57.** 6. **28.58.** 6 учащихся. **28.59.** В 2 раза. **28.60.** 54 ч. **28.62.** В 1,5 раза. **28.63.** 40 %. **28.64.** 3 кг. **28.65.** Уменьшилась на 25 %. **28.67.** 90 000 р., 30 000 р. **28.68.** 200 г, 400 г. **28.69.** 20 кг, 30 кг. **28.71.** 4 %. **28.72.** 9 %. **28.75.** 72 600 р. **28.76.** 20 %. **28.77.** 5 %. **28.78.** 10 %. **28.79.** 10 кг или $5\frac{1}{3}$ кг. **28.80.** 20 кг. **28.81.** 30 кг. **28.82.** 10,2. **28.84.** 13. **28.85.** 202 см. **28.88.** 2 ч 15 мин, 2 ч 24 мин. **28.98.** 3) $a^2 - a + 5$; 4) $x^{48} + x^{24} + 1$. **28.104.** 1) $\frac{2(1-3y)}{(3y+1)(2x+7)}$; 2) $\frac{x^2 + xy + y^2}{y - 2}$; 3) $\frac{1}{ab}$; 4) $\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$. **28.105.** 3) $\frac{x-y}{x+y}$; 4) 1. **28.106.** $\frac{4}{x(x+16)}$. **28.108.** 1) 1; 2) $-\frac{b^2+b+1}{b}$. **28.110.** 1) 1; 2) $\frac{x^8 - x^4 + 1}{x^8 + x^4 + 1}$. **28.111.** 1. **28.113.** $\frac{2^{n+1}}{1 - b^{2^{n+1}}}$. **28.114.** *Указание*. Из условия следует, что $a - \frac{1}{a} = 1$. Умножьте левую часть данного равенства на выражение $\left(a - \frac{1}{a}\right)$. **28.115.** *Указание*. Из условия следует, что $ab + bc + ac = 0$. Далее $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2$. **28.117.** $(x - y)(z - y)(z - x)$. *Указание*. Рассмотрим данное выражение как многочлен с переменной x и параметрами y и z. Покажите, что этот многочлен имеет корни y и z. **28.118.** $(x - y)(z - x)(y - z)$. **28.119.** *Указание*. Из условия следуют равенства $a - b = \frac{b-c}{bc}$, $b - c = \frac{c-a}{ca}$, $c - a = \frac{a-b}{ab}$. Перемножив почленно левые и правые части этих равенств, получаем $(a - b)(b - c)(c - a) = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$. **28.120.** 1) 7; 2) $-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{-5 \pm \sqrt{345}}{10}$; 4) 0; $\frac{-5 \pm \sqrt{3}}{2}$;

5) -1 $-\frac{7}{2}$; 6) $\frac{27}{5}$; 7) 5; $-\frac{5}{4}$; 8) $-\frac{5}{2}$; 0. **28.121.** 1) -4; 2; 3) 1; -1; 4) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; -1; 2; 5) 3; $\frac{4}{5}$; 6) $\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$; 7) $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. **28.122.** 1) 2; 3; 2) 1; 3) -6; -2; $-4 \pm \sqrt{13}$; 4) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) $1 \pm \sqrt{7}$. **28.123.** 1) $[-2; 3]$; 2) $\{5\} \cup [1; 2]$; 3) $(3; +\infty)$; 4) -2; 4. **28.127.** 1) Если $a \neq -4$, то $x = \frac{20 + 3a}{4 + a}$; если $a = -4$, то корней нет; 2) если $a \neq 1$, то $x = \frac{a - 2}{2}$; если $a = 1$, то корней нет; 3) если $a \neq -\frac{1}{3}$ и $a \neq -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{2 + 12a}{3a + 1}$; если $a = -\frac{1}{3}$ или $a = -\frac{1}{4}$, то корней нет. **28.140.** 1) $a \neq 5$; 2) $a = -4$; 3) $a \neq -3{,}5$. **28.142.** 2) (2; 3), (10; 27), (-2; -3), (-10; -27); 3) ($-1{,}5$; $-5{,}5$), (1,5; 5,5); 4) $\left(\sqrt{5}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5}; \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{5}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{5}; -\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$; 5) ($-1$; 6), $\left(-\frac{1}{5}; 10\right)$; 6) (2; 1), ($-2$; -1). **28.144.** 3) (2; 6), (-2; -6), $(2\sqrt{5}; -2\sqrt{5})$, $(-2\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$. **28.145.** 1) (2; 1), (-2; -1). *Указание.* Выполните замену $\frac{x}{y} = t$; 2) (2; 3), (3; 2), (-5; 2), (2; -5); 3) (2; 1), (1; 2), (-2; 1), (1; -2), (2; -1), (-1; 2), (-2; -1), (-1; -2); 4) (2; 1), (1; 2), (-1; -2), (-2; -1), $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}}{10}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}; -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}; -\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$. **28.156.** 1) -7; 2) -2. **28.157.** 1) 0; 2) -3. **28.158.** 1) $-6 < a < 6$; 2) $-12 < a < 8$. **28.159.** 1) $b < -\frac{1}{9}$ или $b > 1$; 2) $b < 2$ или $b > 8$. **28.160.** 1) $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{3}; 4\right)$; 2) $(-3; 0] \cup [2; 9)$. **28.161.** 1) $(-10; 10)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup \left[\frac{1}{6}; +\infty\right)$. **28.165.** 3) $(-\infty; -2\sqrt{3}] \cup (-2; 0) \cup (2; 2\sqrt{3}]$; 4) $[-4; -3) \cup (-2; 2) \cup (3; 4]$. **28.166.** 1) $(-3; -1) \cup \left(\frac{1}{3}; 2\right) \cup (2; 7)$; 2) $(-\infty; -1] \cup (3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2})$; 3) $(-\infty; -3) \cup (-3; 2] \cup (4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -4] \cup [-2; -1] \cup [1; +\infty)$; 5) $[-4; -3) \cup \left[-\frac{3}{2}; 0\right) \cup [1; +\infty)$; 6) $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$; 7) $\left[\frac{2}{3}; 1\right] \cup (2; +\infty)$; 8) $(1 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$; 9) $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **28.167.** 1) $(-\infty; -2) \cup (-2; 3)$; 2) $(-2; -1) \cup (2; 3)$;

3) $(-\infty; -1] \cup (0; 1] \cup (2; 3]$; 4) $(2; +\infty)$; 5) $[-3 - \sqrt{5}; -4) \cup (-2; 0]$; 6) $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4}; -1\right) \cup \left[\frac{-5+\sqrt{41}}{4}; +\infty\right)$; 7) $(2; 5)$; 8) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (0; +\infty)$.

28.168. $a < -4$ или $a \geqslant 8$. **28.169.** $a < -6$. **28.170.** $a < -3$ или $a \geqslant 1$. **28.171.** $a > 6$. **28.172.** $a > 0$. **28.173.** $a < -1$ или $a > 0$. **28.174.** $0 \leqslant a \leqslant 4$. **28.175.** $a > 1$. **28.176.** $a \geqslant \frac{4}{5}$. **28.177.** $1 \leqslant a \leqslant 2$. **28.178.** $-5 < a < 1$. **28.179.** $q \leqslant 0$. **28.185.** 1) $\frac{35}{9}$; 2) 7,2. **28.187.** 1) $\frac{4}{\sqrt{a}-a}$; 2) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$; 3) $\sqrt{x}$; 4) $\frac{18}{4-a}$. **28.188.** 1) 3; 2) 1; 3) 1. **28.190.** 1) $1 - 2a$; 2) -1. **28.191.** 6. **28.192.** 7. **28.193.** 1) $\sqrt{a-3}+1$; 2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}$; 3) $\sqrt{a-3}$; 4) 1. **28.194.** 1) 1; 2) $2ab$; 3) $\frac{16x\sqrt{x}}{(1-x^2)(x-1)}$; 4) $\frac{x+y}{2}$. **28.195.** -115. **28.196.** 4. **28.197.** 1. **28.198.** $\sqrt{3}+1$. **28.202.** $\sqrt{10}+\sqrt{2}$. **28.203.** Если $a > 1$, то $a + 1$; если $0 < a < 1$, то $-a - 1$. **28.204.** $\sqrt{1-x^2}$. **28.205.** -1. **28.206.** Если $0 \leqslant a < \sqrt{2}$, то $6 - 4a$; если $a \geqslant \sqrt{2}$, то $2(a-1)^2$. **28.207.** $\frac{b^2-1}{\sqrt{b}}$. **28.208.** Если $0 < b < a$, то 0; если $0 < a < b$, то $\sqrt{a}-\sqrt{b}$. **28.209.** $2\left(ab+\sqrt{a^2-1}\sqrt{b^2-1}\right)$. *Указание*. Умножьте числитель и знаменатель данной дроби на выражение $(a-\sqrt{a^2-1})(b-\sqrt{b^2-1})$. **28.210.** $\frac{1-b}{1+b}$. **28.211.** Если $a > 2$, то 2; если $1 \leqslant a < 2$, то -2. **28.212.** Если $4 < x < 8$, то $\frac{4x}{x-4}$; если $x \geqslant 8$, то $\frac{2x}{\sqrt{x-4}}$.

28.213. $[-4; -2]$. **28.214.** 1) 1 корень; 2) 2 корня; 3) 2 корня. **28.215.** 24. **28.216.** 1) 1; 2) 2; 3; 3) 1; 4. **28.217.** 4. **28.218.** 5) 4; 6) -4; 7) 4; 8) 10; 9) 5; 10) 7. **28.219.** 1. **28.220.** 4) -1; 17; 6) -1; 3. **28.221.** -2. **28.222.** 1) Если $a = 1$, то $x \geqslant 3$; если $a \neq 1$, то $x = 3$; 2) если $a < 1$, то $x = a$, или $x = 1$, или $x = 3$; если $1 \leqslant a < 3$, то $x = a$ или $x = 3$; если $a \geqslant 3$, то $x = a$; 3) если $a < 0$ или $a = 1$, то $x = 1$; если $a \geqslant 0$ и $a \neq 1$, то $x = 1$ или $x = a^2$. **28.223.** 1) $\left[\frac{3}{4}; 8\right)$; 2) $(-2; -1] \cup [5; 7)$; 3) $[0; 2]$; 4) $\left[\frac{1}{2}; 4\right] \cup \{-3\}$; 5) $(-\infty; -4]$; 6) $\left(-\infty; -\frac{16}{3}\right] \cup [2; 5]$; 7) $[7; +\infty) \cup \{-3; 6\}$; 8) $(-\infty; -2] \cup [9; +\infty) \cup \{8\}$; 9) $(-2; -1] \cup [2; 3)$; 10) $[4; 5)$; 11) $[4; 5) \cup (13; 14]$; 12) $[-6; 3)$. **28.224.** 1) $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$; 2) $(0; 0)$. **28.225.** 1) $\left(\frac{9}{4}; \frac{3}{4}\right)$.

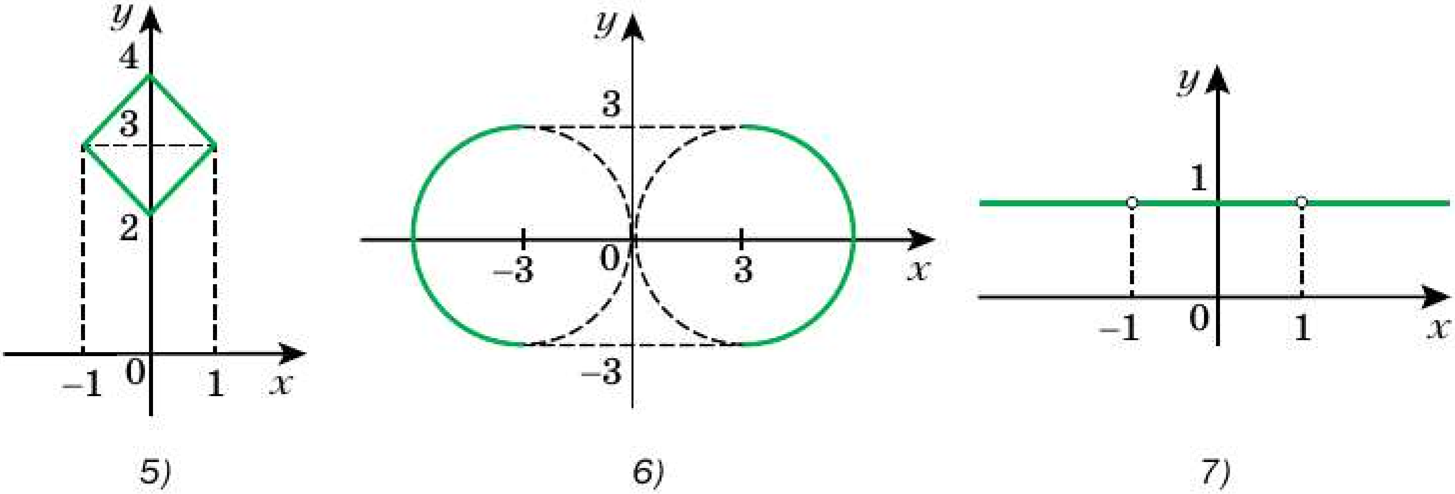


Рис. к задаче 28.226

28.226. См. рисунок. **28.227.** 7) См. рисунок. **28.228.** 1) (0; 2), (4; 2); 2) (1; –1), (1; 2), (5; –1), (5; 2); 3) (1; –1), (–1; 1). **28.229.** 4) См. рисунок. **28.230.** 4) См. рисунок. **28.231.** 2) См. рисунок. **28.233.** 1) См. рисунок.

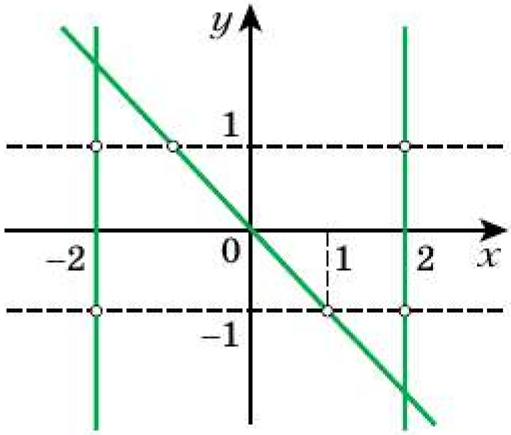


Рис. к задаче 28.227 (7)

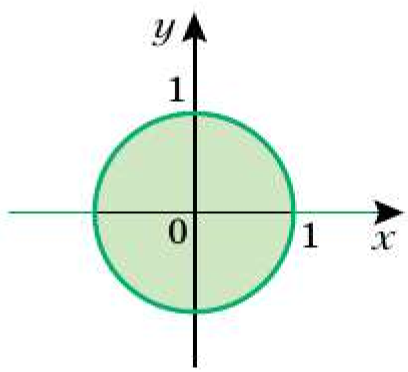


Рис. к задаче 28.229 (4)

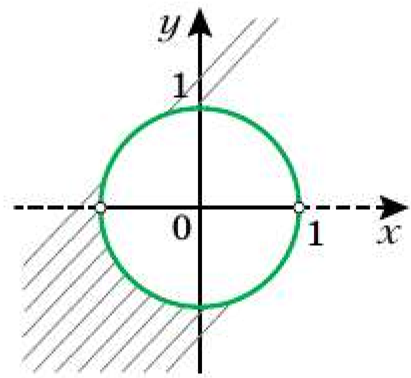


Рис. к задаче 28.230 (4)

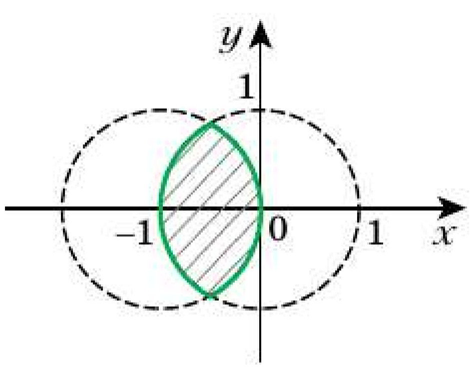


Рис. к задаче 28.231 (2)

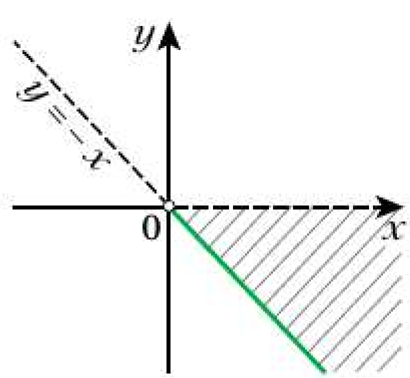


Рис. к задаче 28.233 (1)

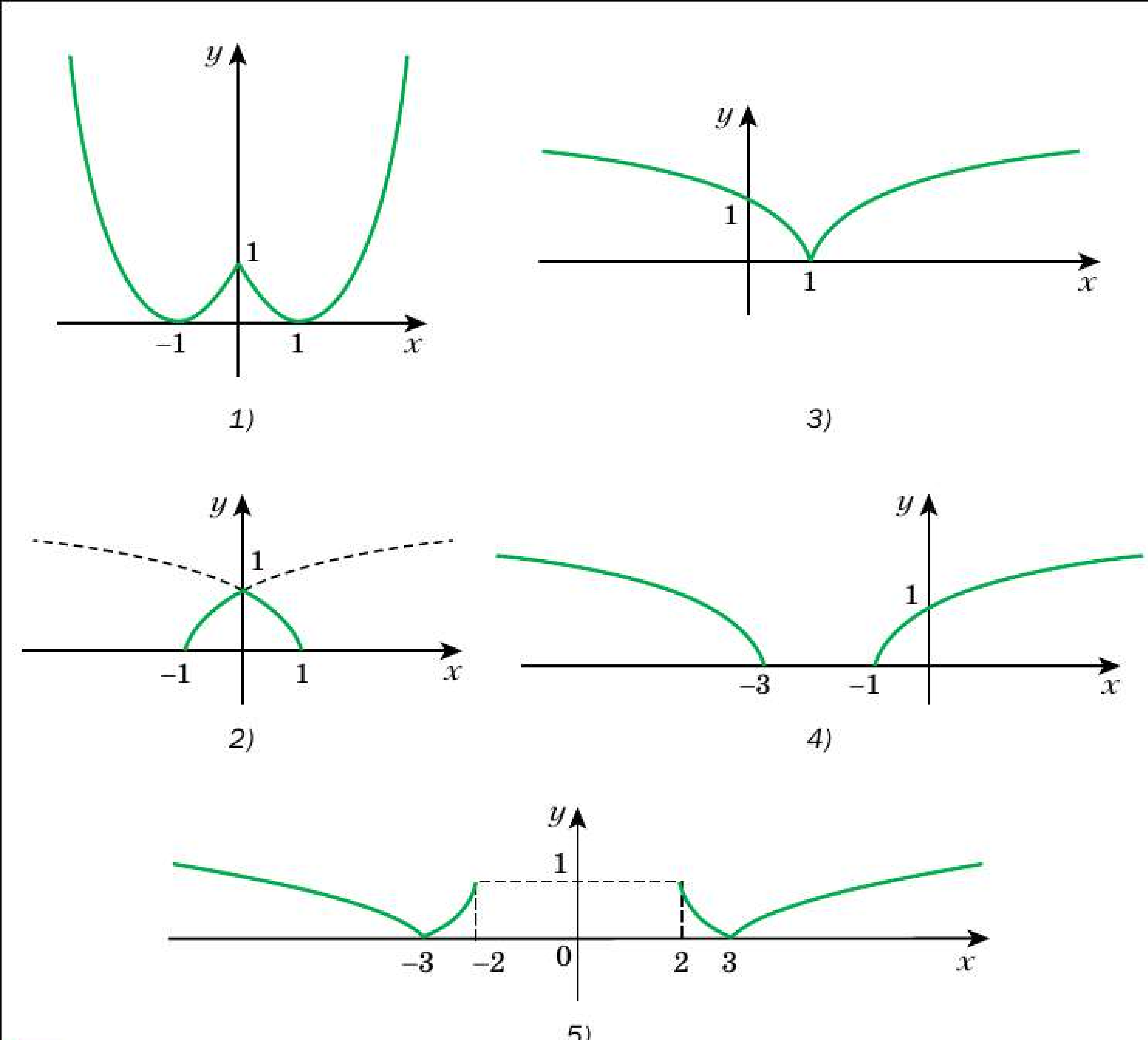


Рис. к задаче 28.238

28.235. 1) $[-3;\,0)\cup[2;\,+\infty)$; 2) $(-\infty;\,1)\cup(4;\,+\infty)\cup\{3\}$; 3) $(-3;\,1]$; 4) $[-2;\,0]\cup\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$; 5) $\left(-\infty;\,\dfrac{3}{4}\right)\cup(4;\,7]$; 6) $[2;\,3)\cup(3;\,+\infty)\cup\{1\}$. **28.236.** 1) $(-\infty;\,3]$; 2) $(0;\,1]$; 4) $(-\infty;\,-2]\cup[2;\,+\infty)$; 5) $[1;\,+\infty)$; 6) $(-\infty;\,4]$. **28.238.** См. рисунок. **28.242.** $y=-8x^2+3$. **28.243.** $p=-6$, $q=13$. **28.244.** $a=\dfrac{4}{9}$, $b=-\dfrac{8}{9}$, $c=-\dfrac{5}{9}$. **28.246.** $c=-10$. **28.249.** Наибольшее значение равно $\dfrac{1}{6}$, наименьшего значения не существует. **28.250.** Наибольшее значение равно 1, наименьшего значения не существует. **28.251.** 2) 2. **28.252.** 1) $-\dfrac{1}{2}$; 2) $\sqrt{6}$.

28.253. *а*) $k > 0$, $b < 0$; *б*) $k < 0$, $b > 0$. **28.254.** $a < 0$, $b > 0$. **28.255.** $a > 0$, $b > 0$. **28.256.** *а*) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$. **28.257.** *а*) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$. **28.258.** Нет. **28.263.** –6. **28.264.** –1. *Указание*. Данное уравнение равносильно такому: $f(g(x)) = f(x^3 + x + 3)$. **28.265.** 2. **28.266.** 1) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 5a - 3$; $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 5a + 5$; 2) если $-1 < a \leqslant 2$, то $\max\limits_{[-1;a]} f(x) = 5$, $\min\limits_{[-1;a]} f(x) = a^2 - 4a$; если $2 < a \leqslant 5$, то $\max\limits_{[-1;a]} f(x) = 5$, $\min\limits_{[-1;a]} f(x) = -4$; если $a > 5$, то $\max\limits_{[-1;a]} f(x) = a^2 - 4a$, $\min\limits_{[-1;a]} f(x) = -4$. **28.267.** 2) Если $a < 0$, то $\max\limits_{[a;2]} f(x) = 1$, $\min\limits_{[a;2]} f(x) = 2a - a^2$; если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то $\max\limits_{[a;2]} f(x) = 1$, $\min\limits_{[a;2]} f(x) = 0$; если $1 < a < 2$, то $\max\limits_{[a;2]} f(x) = 2a - a^2$, $\min\limits_{[a;2]} f(x) = 0$. **28.268.** Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $1 < a < 8$, то 4 корня; если $0 < a < 1$, то 8 корней; если $a = 1$, то 6 корней; если $a = 8$, то 3 корня; если $a > 8$, то 2 корня. **28.269.** Если $a < 0$, то корней нет; если $a = 0$ или $a > 1$, то 2 корня; если $0 < a < 1$, то 4 корня; если $a = 1$, то 3 корня. **28.276.** При $m = 0$ имеем: –1, 1, 3; при $m = 2$ имеем: 5, 5, 5. **28.280.** $a_1 = -1$, $d = 6$. **28.282.** 1377. **28.283.** 210. **28.284.** 280. **28.285.** 240. **28.286.** 616. **28.291.** При $x = 1$ имеем: 1, 2, 4; при $x = 2$ имеем: 3, 3, 3. **28.294.** $-\frac{3}{4}$. **28.296.** –4. **28.297.** 1) 7; 6; 2) выражение не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения. **28.301.** 3) $\frac{1}{4}$. **28.304.** 19. *Указание*. Постройте графики функций $y = \sin x$, $y = \frac{x}{10\pi}$. **28.305.** 3) Графиком уравнения является прямая, совпадающая с осью ординат; 4) *Указание*. Данное уравнение имеет решение лишь при условии $\sin x \geqslant 0$. Поэтому данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ \left[\begin{array}{l} y = \sin x, \\ y = -\sin x. \end{array}\right. \end{cases}$ Искомый график изображён на рисунке. **28.308.** 1) *Указание*. Представьте слагаемое $2\sin^2\alpha$ в виде сум-

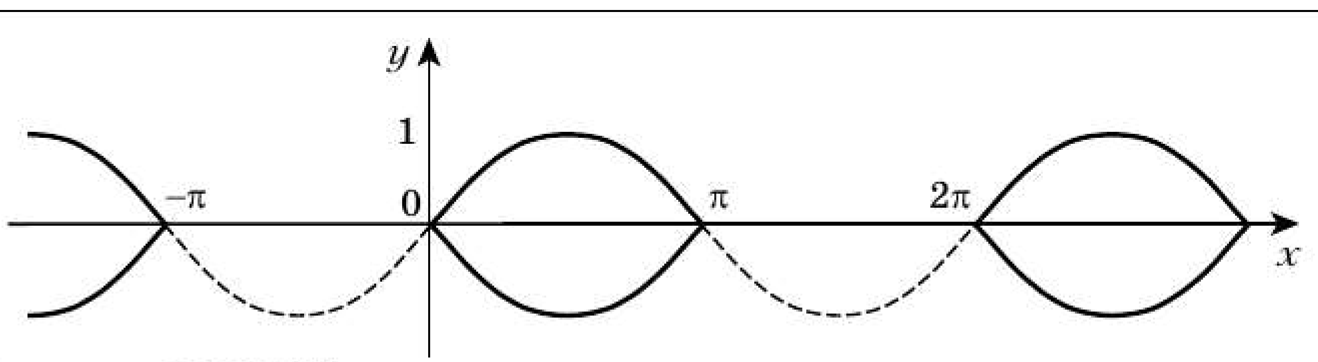
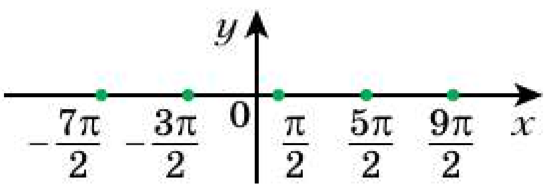


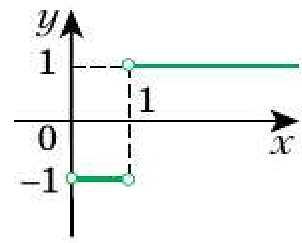
Рис. **к задаче 28.305 (4)**

мы $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha$. **28.309.** 1) 3; 2; 2) выражение не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения. *Указание*. Области определения данного выражения не принадлежат значения α, при которых $\sin\alpha = 0$ и $\sin^2\alpha = 1$. **28.310.** 1) $\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}$; 2) $-\frac{2}{\cos\alpha}$. **28.311.** $\frac{8(1+2b^2-b^4)}{(b^2-1)^4}$. **28.312.** $b^4 - 4b^2 + 2$. **28.314.** 1) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$; 2) $-\frac{1}{\cos\alpha}$. **28.315.** 1) 2; 2) 5. **28.316.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{1-b^2} - b)$. **28. 317.** –2. **28. 318.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **28.320.** 2. *Указание*. Из равенства $\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta}{1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$ следует, что $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(\alpha+\beta)(1 - \mathrm{tg}\,\alpha\mathrm{tg}\,\beta)$. Тогда $(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)(1 + \mathrm{tg}\,\beta) = 1 + \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\alpha\mathrm{tg}\,\beta = 1 + \mathrm{tg}(\alpha + \beta)(1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta) + 1 + \mathrm{tg}(\alpha+\beta)(1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta) + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = 1 + \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}(1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta) + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = 1 + 1 - \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta = 2$. **28.321.** 2. **28.323.** 1) 1. *Указание*. Приведите каждую функцию к наименьшему положительному аргументу; 2) 1. **28.324.** 2) $\frac{1}{4}\sin\alpha$; 3) $4\cos 4\alpha$; 4) $\frac{1}{\cos 2\alpha}$; 6) –1. **28.325.** 41. **28.329.** $\frac{3}{5}$. **28.330.** 2 или $-\frac{1}{3}$. **28.332.** 1) $\frac{1}{\sin 5\alpha}$; 2) $2\cos 2\alpha$; 3) $-\frac{1}{2}\sin\alpha$. **28.337.** 1) $\{-1\}$; 2) $[-1; 1]$. **28.340.** 5) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 7) $\pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 8) $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **28.341.** 1) $\pm\mathrm{arctg}\,\sqrt{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 2) $\frac{\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 5) πn, $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; 6) $\frac{\pi n}{5}$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. **28.342.** 2) $\frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. *Указание*. $\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 6x}{2} - \frac{1-\cos 8x}{2} = 0$. **28.345.** 1) πn, $n \in \mathbb{Z}$; 2) корней нет; 3) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; 4) $\pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **28.346.** $\frac{\pi}{2}$. **28.352.** 1) 2; 2) 5; 3) 1; 4) 8; 5) 3; 6) $\frac{8}{3}$. **28.353.** 1) 4; 2) $\log_3 2$; 3) $\log_7 5$; 4) 1; 5) 3; $3\log_6 2$; 6) 0; 3; 7) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; 8) –1; 2; 9) 3; 10) 1; $\log_3\frac{5}{4}$. **28.354.** 1) $\log_{1,5} 10$; 2) –2; 3) 0; 4) –1; 0; 1. **28.355.** 2) $(-1; 4]$; 3) $[0; 4]$; 4) $[0; 4]$; 5) $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$; 6) $[2; 3) \cup [7; +\infty)$; 7) $(-\infty; -1) \cup (3; 6]$;

8) (–3; 0). **28.356.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 3)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(2; +\infty)$; 5) $(-\infty; 3]$; 6) $(-\infty; -1]$. **28.357.** 1) $(1; +\infty)$; 2) $[-2; 1]$; 3) $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$; 4) $[-2; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2]$; 6) $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$. **28.359.** 2) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$; 3) $(1; +\infty)$; 4) $(-\infty; -3) \cup (-3; -2\sqrt{2}) \cup (2\sqrt{2}; 3) \cup (3; +\infty)$; 5) $(0; 1) \cup (1; 2)$; 6) $(2; 3) \cup$ $\cup (3; +\infty)$. **28.361.** См. рисунок. **28.363.** 2) 50; 3) 27; 6) 0; 7) 2; 8) корней



5)



6)

Рис. **к задаче 28.361**

нет; 9) корней нет. **28.364.** 3) Корней нет; 4) 5; 5) 0; 6) корней нет; 7) –2; 8) –4. **28.365.** 1) 1,5; 2) 5,5; 3) 2; 3; 4) –1. **28.366.** 1) $\frac{1}{27}$; $\sqrt[3]{9}$; 2) e^7; $\frac{1}{e^3}$; 3) 10; 100; 4) 10 000; 5) 27; $\frac{1}{3}$; 6) 5; $\sqrt[9]{5}$; 7) $\frac{1}{7}$; 1; 7; 8) 81; 3. **28.367.** 1) $\frac{1}{5}$; 125; 2) $\frac{1}{10}$; 100; 3) 7; $\frac{1}{\sqrt{7}}$; 4) 6; $\frac{1}{36}$. **28.368.** 4) $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; 5) $[-5; -4) \cup (0; 1]$; 6) $[-4; -3) \cup (1; 2]$; 7) $(-3; -2) \cup (-2; -1)$; 8) $[-2; -1)$; 9) $(-1; 0) \cup (0; 2)$. **28.369.** 3) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$; 4) $(1; 3)$; 5) $(-4; 6)$; 6) $(-1; 1)$; 7) $(0; 9]$; 8) $(-\infty; -5)$. **28.370.** 1) $(-\infty; -1)$; 2) $(2; +\infty)$. **28.371.** 1) $(0; 1]$; 2) $(1; 3]$; 3) $[3; 4)$; 4) $(-2; 0]$. **28.372.** 1) $(0; 1] \cup [10; +\infty)$; 2) $\left[\frac{1}{e}; 1\right]$; 3) $\left(0; \frac{1}{32}\right] \cup [8; +\infty)$; 4) $\left[-3; -\frac{1}{9}\right]$; 5) $(10; 100) \cup (100; +\infty)$; 6) $\left(0; \frac{1}{216}\right) \cup (1; 36)$. **28.377.** 1) $y = x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; 3) $y = -\frac{x\sqrt{2}}{6} + \frac{\pi\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $y = 4x - 7$. **28.379.** (2; 3). **28.380.** (12; 0); (0; 12); (0; 0). **28.381.** (1; 0). **28.382.** $y = 5x$ и $y = 5x - 27$. **28.383.** $\frac{8}{3}$. **28.391.** 1) Возрастает на $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$, убывает на $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$, $x_{\max} = \frac{1}{4}$, $x_{\min} = -\frac{1}{3}$; 2) возрастает на $\boldsymbol{R}$; 3) возрастает на $(-\infty; 0]$ и $[4; +\infty)$, убывает на $[0; 4]$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 4$;

4) возрастает на $(-\infty; -4]$ и $[4; +\infty)$, убывает на $[-4; 0)$ и $(0; 4]$, $x_{max} = -4$, $x_{min} = 4$; 5) возрастает на $[-1; 0)$ и $[1; +\infty)$, убывает на $(-\infty; -1]$ и $(0; 1]$, $x_{min} = -1$, $x_{min} = 1$; 6) возрастает на $(-\infty; -2)$, $(-2; 1]$, $[4; +\infty)$, убывает на $[1; 2)$ и $(2; 4]$, $x_{max} = 1$, $x_{min} = 4$; 7) возрастает на $(-\infty; -2)$ и $(-2; +\infty)$; 8) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(-\infty; 2]$, $x_{min} = 2$; 9) возрастает на $(-\infty; -1]$, убывает на $[-1; +\infty)$, $x_{max} = -1$; 10) возрастает на $[2; +\infty)$, убывает на $(0; 2]$, $x_{min} = 2$; 11) возрастает на $[e^2; +\infty)$, убывает на $(0; e^2]$, $x_{min} = e^2$; 12) возрастает на $(0; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$, $x_{max} = 1$. **28.392.** 1) $x_{min} = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_{max} = \frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) точек экстремума нет. **28.393.** 1) 1; –6; 2) $\frac{3}{5}$; –1; 3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\sqrt{2}$; $-\sqrt{2}$; 5) 4; 0; 6) $\frac{4}{5}$; –1. **28.394.** $15 = 10 + 5$. **28.395.** $20 = 10 + 10$. **28.396.** –1. **28.397.** 1250 см². **28.398.** См. рисунок. **28.399.** 2) $\sqrt{x} - \frac{1}{x^3} + C$;

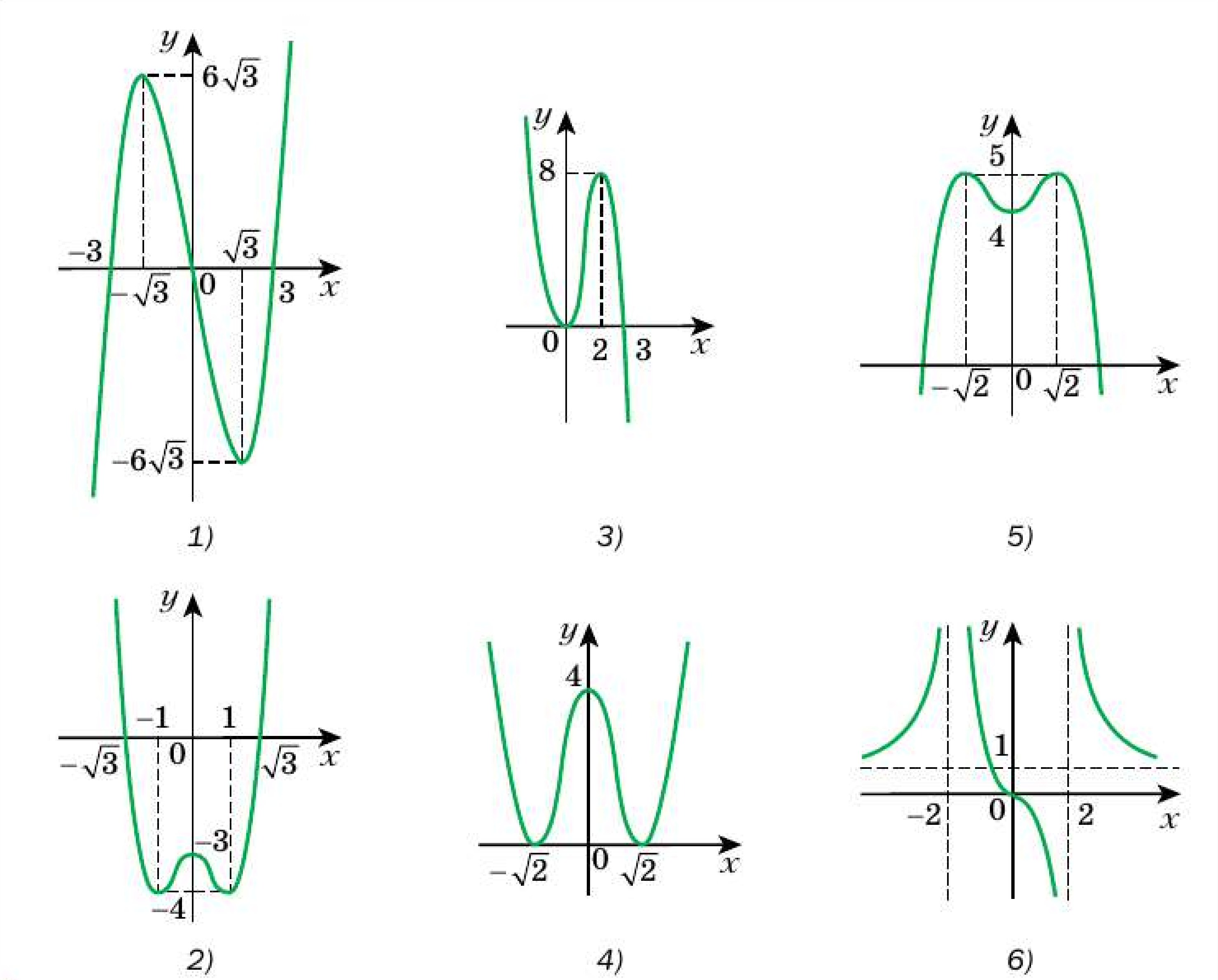


Рис. к задаче 28.398

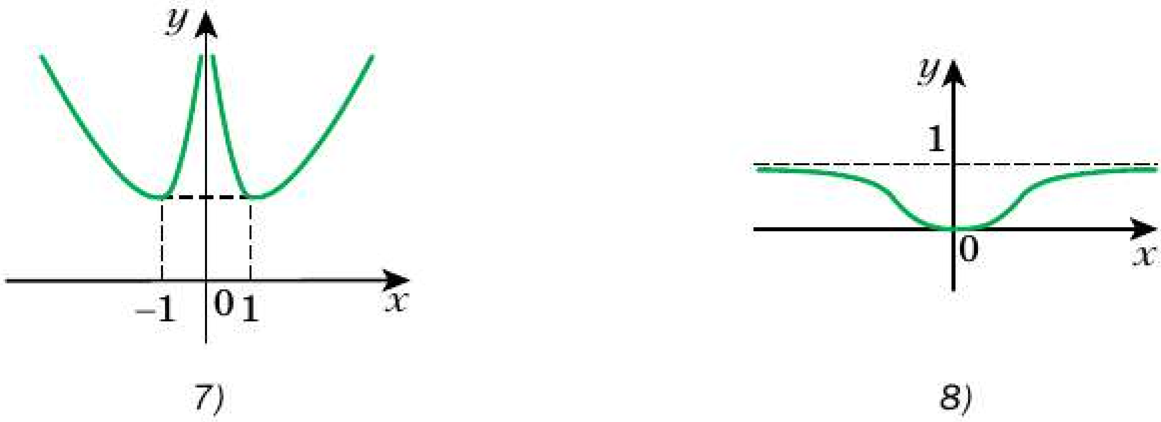


Рис. к задаче 28.398 (окончание)

3) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x + C$; 4) $2x + 4\ln(1 - x) + C$; 5) $\frac{1}{5}e^{5x} + \frac{7}{4}e^{-4x} + C$; 6) $\sqrt{2x+1} - 4\sin\frac{x}{4} + C$. **28.400.** 1) $F(x) = x^2 + 4x - 11$; 2) $F(x) = x^4 - x^2 + 3x + 5$; 3) $F(x) = \sin\frac{x}{2} + \cos 5x$; 4) $F(x) = -\sqrt{1-2x} + 4$; 5) $F(x) = 2x^3 + 4e^{\frac{x}{4}} - 16$; 6) $F(x) = \frac{(5x-3)^5 - 7}{25}$. **28.401.** $s(t) = \frac{t^3}{3} + 1$. **28.402.** $f(x) = 2\sqrt{x} - 1$. **28.403.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; 4) 18; 5) $4\ln 3 - 4$; 6) 2; 7) 20; 8) $\frac{e^2-1}{e^4}$; 9) $\frac{1}{4}\ln 21$. **28.404.** 1) 6; 2) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$; 3) ln3; 4) $e^2 - 3$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 1,5; 7) 4,5; 8) $\frac{32}{3}$; 9) $\frac{8}{3}$; 10) $7 - 5\ln 2$. **28.405.** 1) 6π; 2) 1.

29.1. $\frac{1}{8}$. **29.2.** $\frac{55}{216}$. **29.3.** $0{,}9 \cdot 0{,}1^4$. **29.4.** $0{,}99^{365} \approx 0{,}026$. **29.5.** 23. **29.6.** $P(y = 1) = \frac{5}{9}$, $P(y = -1) = \frac{4}{9}$. *Указание*. Событие $y = 1$ происходит только в том случае, когда происходит одно из следующих несовместных событий: $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, ... Далее найдите сумму чисел $P(x = 1)$, $P(x = 3)$, $P(x = 5)$, ... **29.7.** $\frac{2}{7}$. *Указание*. Рассмотрите случайную величину x, имеющую геометрическое распределение с параметром $p = \frac{1}{2}$, и найдите вероятность события «остаток при делении x на 3 равен 2». **29.8.** $P(A) \approx 85$ %. *Указание*. Пусть случайная величина x равна номеру квартала (периода длиной 3 месяца), в который произошла первая поломка телевизора. Например, если телевизор первый раз выйдет из строя в период с четвёртого по шестой месяц включительно (второй квартал), то $x = 2$. Можно считать, что x имеет геометрическое распределение. Учитывая, что $P(x = 2) = 0{,}02$, найдите $P(x > 8)$. **29.9.** Ошибаются и Дима, и Володя. *Указание*. Поскольку случайные величины x и y являются дискретными и принимают бесконечное множество значений, то их распределения вероятностей не могут быть равномерными. Поэтому вывод Димы о том, что $P(y = 10)$ гарантированно равна 0, ошибочный. Аналогично ошибочный вывод Володи о том, что $P(10 > y)$ гарантированно равна 0. Дать правильный ответ на вопрос, чему равна вероятность события $x = y$, можно, если уточнить условие задачи, а именно смысл предложения: «Среди натуральных чисел случайным образом выбрали два числа x и y». Это можно сделать, указав распределение вероятностей случайных величин x и y. **30.1.** 1) $C_{16000}^{k} \cdot 0{,}00025^k \cdot 0{,}99975^{16000-k}$; 2) $p_0 \approx 1{,}831$ %, $p_1 \approx 7{,}324$ %, $p_4 \approx 19{,}539$ %, $p_5 \approx 15{,}631$ %; 3) $p_0 \approx 1{,}832$ %, $p_1 \approx 7{,}326$ %, $p_4 \approx 19{,}537$ %, $p_5 \approx 15{,}629$ %; 4) $p_{10} \approx 0{,}53$ %. **30.2.** 19 %. **30.3.** 8,3 %. **30.4.** 14. *Указание*. Сравните числа $P(z = k)$ и $P(z = k + 1)$. **30.5.** 1) 6,7 %; 2) 6,8 %. **30.6.** 1) 33 %; 2) 32 %. **30.7.** $P(A) \approx 11$ %. *Указание*. Найдите число λ, равное среднему количеству горошин перца в одной ложке, и воспользуйтесь распределением Пуассона с параметром λ. **30.8.** $P(A) \approx 7$ %. **30.9.** $P(A) \approx 41$ %. **31.1.** 16,5 %. **31.2.** $P(y = 0) = 1 - p^n$, $P(y = 1) = p^n$. **31.3.** Да. **31.4.** Случайная величина $x + y$ имеет биномиальное распределение с параметрами $n + m$ и p. *Указание*. Представьте каждую из случайных величин x и y в виде суммы случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром p. **31.5.** $P(x = 0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{10}}$,

$P(x=11)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2^{10}}$, $P(x=k)=\frac{1}{3}\cdot\frac{C_{10}^{k}}{2^{10}}+\frac{2}{3}\cdot\frac{C_{10}^{k-1}}{2^{10}}$, где k принимает значения от 1 до 10. **31.7.** *Указание*. Рассмотрим все пары $(a_i;\ b_i)$, где a_i и b_i — элементы множества значений случайных величин x и y, и $a_i-b_i=d$. Тогда, поскольку величины x и y являются независимыми, то $P(z=d)=\sum P(x=a_i)P(y=b_i)$, где сумма берётся по всем таким парам $(a_i;\ b_i)$. Кроме того, $P(z=-d)=\sum P(y=a_i)P(x=b_i)$. Осталось учесть, что величины x и y имеют одинаковое распределение. **32.1.** 1) –10; 2) 49. **32.2.** 1) $\sqrt{97}$; 2) $\sqrt{2089}$. **32.3.** Нет. **32.4.** *Указание*. Представьте случайную величину x в виде суммы n случайных величин, имеющих распределение Бернулли с параметром p. **32.6.** $\frac{5n}{36}$. **32.7.** 122,5. **33.1.** Нет. *Указание*. Например, если всё время будет выпадать герб, то частота будет равна 1 для всех значений n. **33.2.** Нет. **33.3.** Нет. *Указание*. При всех нечётных значениях n вероятность события $x_n=\frac{1}{2}$ равна 0. **33.4.** Нет. *Указание*. Рассмотрите последовательность Г, Г, Ч, Г, Ч, Г, Ч, Г, Ч,... и докажите, что среди чисел x_n может не оказаться ни одного значения, равного $\frac{1}{2}$. **33.5.** Да. *Указание*. Воспользуйтесь теоремой Бернулли при $\delta<0{,}3$. **33.6.** Нет. *Указание*. При любом значении n вероятность события $x_n=0$ равна $\frac{1}{2^n}$. Поскольку значение $x_n=0$ не удовлетворяет неравенству $0{,}49\leqslant x_n\leqslant 0{,}51$, то $P(0{,}49\leqslant x_n\leqslant 0{,}51)\leqslant 1-\frac{1}{2^n}<1$. **33.7.** Да. *Указание*. Воспользуйтесь теоремой Бернулли при $\delta<0{,}0001$. **33.8.** Да. **33.9.** Да. **33.10.** Если n — нечётное число, то $P\left(x_n>\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$; если n — чётное число, то $P\left(x_n>\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}$. *Указание*. Докажите, что $P\left(x_n<\frac{1}{2}\right)=P\left(x_n>\frac{1}{2}\right)$, а также докажите, что $P\left(x_n=\frac{1}{2}\right)=0$, когда n — нечётное число, и $P\left(x_n=\frac{1}{2}\right)>0$, когда n — чётное число. **33.11.** Да. *Указание*. Если n — нечётное число, то $P\left(x_n=\frac{1}{2}\right)=0$. Если n — чётное число, то $P\left(x_n=\frac{1}{2}\right)=\frac{C_n^{n/2}}{2^n}$. Используя метод математической индукции, можно доказать, что $\frac{C_n^{n/2}}{2^n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n+1}}$. **34.2.** *Указание*. В неравенстве Чебышёва положите δ равным 3σ. **34.3.** *Указание.* 1) В неравенстве Чебышёва положите δ равным 4σ; 2) в неравенстве Чебышёва положите δ равным 6σ. **34.4.** 2) $P(A) \approx 93$ %. **34.6.** *Указание.* В сумме для математического ожидания вычеркните слагаемые $x_i p_i$, у которых $x_i < \delta$. **34.7.** *Указание.* Воспользуйтесь неравенством Маркова. **34.9.** *Указание.* Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины y и воспользуйтесь неравенством Чебышёва. **35.3.** $\frac{1}{2}$. **35.4.** $-\frac{1}{36}$. **35.5.** $-\frac{n}{36}$. *Указание.* Представьте каждую из случайных величин x и y в виде суммы n случайных величин, имеющих распределение Бернулли, и воспользуйтесь свойствами ковариации. **35.6.** 2,25. **36.1.** *Указание.* Воспользуйтесь свойством ковариации: $\operatorname{cov}^2(x, y) \leqslant D(x)D(y)$. **36.3.** –1. *Указание.* Случайные величины связаны линейной зависимостью $y = n - x$. **36.4.** $-\frac{1}{5}$. **36.5.** $-\frac{1}{5}$. **36.6.** *Указание.* Представьте каждую из случайных величин x и y в виде суммы случайных величин, имеющих распределение Бернулли. **37.1.** Нет. **37.2.** Нет. **37.3.** 1) 20 %; 2) 30 %; 3) 40 %. **37.4.** 1) 40 %; 2) 10 %; 3) 90 %. **37.5.** 11,5. **37.6.** 0,25. **37.7.** $\frac{\pi}{2}$. **37.8.** 1) $e^{-1} - e^{-3}$; 2) 1; 3) $1 - e^{-1}$. **37.10.** $p(x) = \begin{cases} 2x, \ x \in [0; 1], \\ 0, \ x \notin [0; 1]. \end{cases}$ *Указание.* Воспользуйтесь ключевой задачей 37.9. **38.1.** 1) $p(x) = \begin{cases} 0{,}5, \ x \in [1; 3], \\ 0, \ x \notin [1; 3]; \end{cases}$ 2) $p(x) = \begin{cases} 0{,}1, \ x \in [-4; 6], \\ 0, \ x \notin [-4; 6]. \end{cases}$ **38.2.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$. **38.4.** 1) $p(x) = \begin{cases} 0{,}5, \ x \in [1; 3], \\ 0, \ x \notin [1; 3]; \end{cases}$ 2) $p(x) = \begin{cases} 2x, \ x \in [0; 1], \\ 0, \ x \notin [0; 1]. \end{cases}$ *Указание.* Для всех $x \in [0; 1]$ имеем: $P(u \leqslant x) = P(t \leqslant x^2) = x^2$. Далее воспользуйтесь ключевой задачей 37.9; 3) $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{4 + x}}, \ x \in [-3; 0], \\ 0, \ x \notin [-3; 0]. \end{cases}$ **40.1.** 1) 48 %; 3) 90 %; 5) 63 %. **40.2.** 1) 0,47; 2) 0,36; 6) 1,32. **41.1.** 1) $M(x) = 5$, $\sigma(x) = 2{,}4$. **41.2.** 1) 34 %; 2) 38 %; 3) 2,3 %; 4) 100 %. **41.4.** $M(x) \approx 21{,}85$, $\sigma(x) \approx 18{,}42$. **41.5.** 99,5 %. **41.6.** 75 %. **41.7.** 1,7 %. **41.8.** $x \approx 160$ баллов. **41.9.** $\mu \approx 2{,}004$ см, $\sigma \approx 0{,}0127$. **41.11.** 1,3 %. *Указание.* Найдите математическое ожидание и стандартное отклонение объёма сока, наливаемого двумя автоматами. **41.12.** 10 %. *Указание.* Найдите вероятность того, что результат сдающего окажется выше 110. Далее воспользуйтесь биномиальным распределением.

41.13. 22,5 %. *Указание.* Найдите вероятность того, что наугад выбранная одиннадцатиклассница имеет рост не ниже 180 см. Далее воспользуйтесь распределением Пуассона. **42.1.** 20 мин. **42.2.** Вероятность поломки в первый месяц выше. *Указание.* Пусть случайная величина t равна количеству дней после покупки телефона до его первой поломки. Тогда можно считать, что t имеет показательное распределение с параметром a. Поскольку ae^{-ax} — убывающая функция, то $\int\limits_0^{30} ae^{-ax}dx > \int\limits_k^{k+28} ae^{-ax}dx$, где k — количество дней от покупки до 1 февраля следующего года. **42.3.** $P(A) \approx 31{,}9$ %. **42.4.** $P(A) \approx 20{,}6$ %. **42.5.** $P(A) \approx 92$ %. **42.7.** $P(A) \approx 34$ %. *Указание.* Пусть x — случайная величина, равная времени ожидания звонка по первому телефону, а y — по второму. Тогда x имеет показательное распределение с параметром $a_1 = \frac{1}{4}$, а y — с параметром $a_2 = \frac{1}{6}$. Поэтому вероятность того, что оставшемуся менеджеру придётся ответить на звонок какого-то телефона уже в первую минуту работы, равна $p = 1 - P(x > 1, y > 1)$. Поскольку случайные величины x и y являются независимыми, то $p = 1 - P(x > 1)P(y > 1)$. **42.8.** $P(A) \approx 13{,}5$ %. *Указание.* Пусть x — количество покупателей в аптеке за один час. Тогда случайная величина x имеет распределение Пуассона. Покажите, что параметр этого распределения равен $\lambda = 6$. Далее, для оценки времени ожидания очередного покупателя воспользуйтесь показательным распределением с параметром $a = 6$. **43.1.** Гипотеза A — нулевая, B — альтернативная. **43.2.** Гипотеза A — нулевая, B — альтернативная. **43.3.** Основная гипотеза — присадка не уменьшает расход топлива, конкурирующая гипотеза — присадка уменьшает расход топлива. **43.4.** Происходит ошибка первого рода. Если уменьшить уровень значимости, то количество таких ошибок уменьшится. Если собственники магазина уменьшат уровень значимости, то система будет чаще выпускать из магазина мошенников, не оплативших товар (увеличится вероятность возникновения ошибки второго рода). **43.5.** Нет. *Указание.* Пусть x — число битых яиц в партии из 2000 яиц. Тогда 4 % означает наличие 80 битых яиц в партии. Если собственник прав (основная гипотеза), то x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 2000$ и $p = 0{,}03$. Приближая биномиальное распределение нормальным, покажите, что $P(x \geqslant 80) \approx 0{,}4\%$. Поэтому есть весомые основания отвергнуть нулевую гипотезу. **43.6.** *Указание.* Пусть случайная величина x равна количеству людей, поддерживающих партию, в группе из $n = 100$ человек. Если уровень поддержки партии в целом по стране составляет $p = 25$ % (основная гипотеза), то x имеет биномиальное распределение с параметрами $n = 100$ и $p = 0{,}25$.

Приближая биномиальное распределение нормальным, покажите, что $P(x \leqslant 20) \approx 12{,}4\%$. Поэтому, несмотря на то что при опросе партию поддержали только 20 % опрошенных, такие результаты нельзя считать убедительными, чтобы отвергнуть нулевую гипотезу даже на уровне значимости 10 %. **43.7.** При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ % нельзя утверждать, что баскетболист стал бросать точнее. При этом возникает ошибка второго рода. Ошибка могла возникнуть из-за того, что установлен слишком маленький уровень значимости. **43.8.** *Указание.* Пусть случайная величина x равна числу вишенок в одном стакане компота. Тогда x имеет распределение Пуассона с параметром λ. Если Карлсон добавил в воду всю банку варенья, то в один стакан в среднем должно попасть 7 вишенок, т. е. $\lambda = 7$ (основная гипотеза). Тогда $P(x \leqslant 2) \approx 3$ %. Поэтому у Малыша есть весомые основания (например, на уровне значимости $\alpha = 5$ %) заподозрить, что Карлсон съел часть варенья.

Алфавитно-предметный указатель

Оглавление

Таблица производных некоторых функций

Функция f	Производная f'
k (некоторое число)	0
x	1
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Правила дифференцирования

$$(f+g)' = f' + g'$$
$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$
$$(kf)' = kf'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

Уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Таблица первообразных некоторых функций

Функция f	Общий вид первообразной функции f
k (постоянная)	$kx + C$
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

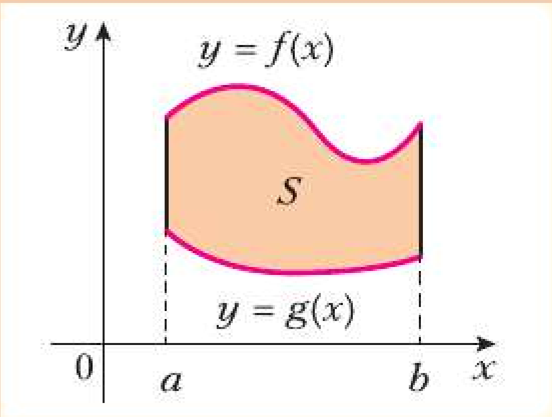
Правила интегрирования

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
$$\int (f(x) - g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx,$$
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Формула Ньютона — Лейбница

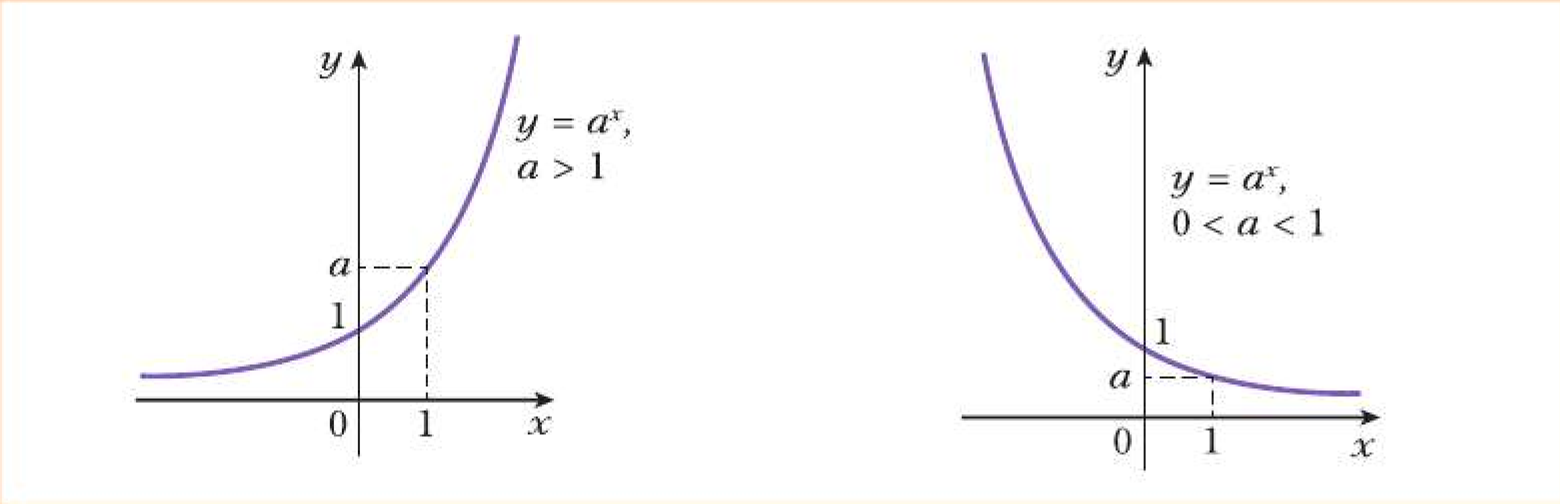
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Вычисление площадей



$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

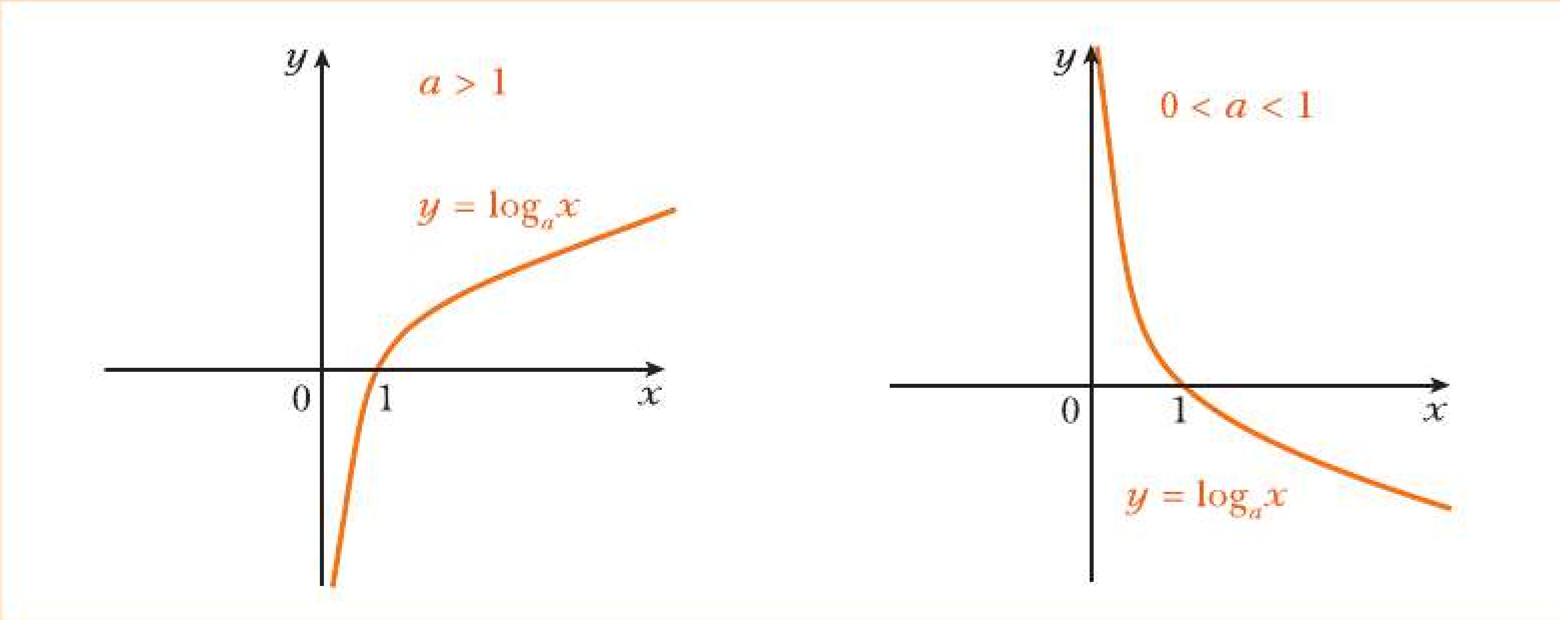
График показательной функции



Свойства логарифмов

$$a^{\log_a b} = b$$
$$\log_a 1 = 0$$
$$\log_a a = 1$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^\beta = \beta \log_a x$$
$$\log_{a^\beta} x = \frac{1}{\beta} \log_a x$$
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

График логарифмической функции



Тригонометрическая форма комплексного числа

$$a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi$$

Формула Муавра

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Свойства вероятности

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Если A и B — несовместные события, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Если A и B — независимые события, то $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Математическое ожидание

$$M(x) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$$

Схема Бернулли

$$p(x = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$$